

THÈSE

présentée pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE REIMS
CHAMPAGNE-ARDENNE**

Spécialité : Transferts Thermiques

par

Sébastien Chemin

Etude des Interactions Thermiques Fluide-Structure par un Couplage de Codes de Calcul

Soutenue le 18 Décembre 2006 devant le jury composé de :

M-P. ERRERA	Maître de Recherche, ONERA	Examineur
S. HARMAND	Professeur, Université de Valenciennes	Rapporteur
M. LACHI	Professeur, Université de Reims Champagne-Ardenne	Directeur de thèse
D. MAILLET	Professeur, Institut National Polytechnique de Lorraine	Rapporteur
J. PADET	Professeur, Université de Reims Champagne-Ardenne	Président
M. REBAY	Professeur, Université de Reims Champagne-Ardenne	Examineur
F-X. ROUX	Maître de Recherche, ONERA	Examineur

Laboratoire d'accueil : Département du Traitement de l'Information et Modélisation

Office National d'Études et de Recherches Aérospatiales
Centre de Chatillon

Remerciements

Je tiens à remercier en premier lieu Souad Harmand, Denis Maillet et Jacques Padet pour avoir accepté de porter à la fois un regard critique et un vif intérêt à mon travail.

Je remercie mon directeur de thèse, Mohammed Lachi. Il m'a apporté durant cette thèse toute son expérience des phénomènes thermiques, ce qui m'a permis de mener à bien cette étude. Je remercie également Mourad Rebay grâce à qui j'ai pu intégrer à ma thèse une étude expérimentale. Celle-ci a été très utile pour valider les calculs effectués.

Un grand merci à François-Xavier Roux de m'avoir accueilli au sein de son unité et de m'avoir fait profiter de toute son expérience en mathématiques appliquées.

Je voudrais exprimer une reconnaissance toute particulière à Marc-Paul Errera qui m'a encadré tout au long de cette thèse et sans qui rien n'aurait été possible. Il m'a toujours soutenu, dans les bons moments et les plus difficiles, comme la finale de la coupe du monde 2006 par exemple.

Merci également à Frédéric Feyel qui a été d'une aide précieuse dans le cadre des travaux effectués sur le code ZeBuLoN.

Pour leurs conseils et leurs sympathies, j'adresse mes remerciements à Gilles Chaineray, Xavier Juvigny et Richard Phibel.

Merci à Guillaume Turpin, en espérant un titre de champion d'ici la fin du siècle pour le PSG, à Antoine Biancherin, en espérant que l'OM ne soit plus jamais champion, à Lionel Tessé, qui fût une oreille attentive, et à Julien Troyes pour son soutien.

J'exprime une profonde reconnaissance à tous ceux qui m'ont permis d'évoluer dans un environnement agréable : Raphaëlle Lecot, Didier Hebert, Juliet Ryan, Nicolas Bertier, Laurent Series, Loic Gouarin, Dominique Scherrer, Daniel Gaffié, Pascale Gilbank, François Vuillot, Denis Dutoya, Bernard Courbet, Emmanuel Laroche, Laëtitia Larriau, Tristan Soubiré.

Enfin merci à mes parents et ma soeur pour leur soutien et leurs encouragements.

Table des matières

Introduction	7
I Modélisation numérique	11
1 Modélisation dans le fluide	13
1.1 Modèle physique	13
1.1.1 Equations de bilan	13
1.1.2 Modélisation de la turbulence	14
1.2 Discrétisation	19
1.2.1 Discrétisation spatiale	19
1.2.2 Discrétisation temporelle	25
2 Modélisation dans la structure	29
2.1 Modèle thermique	29
2.1.1 Equation de la chaleur	29
2.1.2 Formulation variationnelle	30
2.2 Discrétisation en éléments finis	32
2.2.1 Approximation discrète de la température	32
2.2.2 Méthode de Galerkin	36
2.3 Discrétisation temporelle	40
II Couplage thermique fluide-structure stationnaire	41
1 Introduction	45
1.1 Problème aérothermique couplé en régime permanent	45
1.2 Approche linéaire : méthodes de décomposition de domaine	47
1.2.1 Problème de Dirichlet-Neumann	48
1.2.2 Problème de Dirichlet-Fourier	51
1.2.3 Problème de Fourier-Fourier	53
2 Méthodes de couplage stationnaire	55
2.1 Algorithme partitionné	55
2.1.1 Principe	55
2.1.2 Conditions de raccord	59
2.1.3 Critère de convergence	59
2.2 Etude de stabilité	60

2.2.1	Modèle Dirichlet-Fourier ou méthode à un coefficient	60
2.2.2	Modèle Fourier-Fourier ou méthode à deux coefficients	66
2.3	Approximation des paramètres de couplage	68
2.3.1	Coefficient de couplage côté fluide	68
2.3.2	Coefficient de couplage côté solide	70
3	Synchronisation des échanges numériques	73
3.1	Bibliothèque de couplage MpCCI	73
3.1.1	Structure	74
3.1.2	Traitement géométrique	75
3.1.3	Interpolations	75
3.2	Dynamique des échanges	76
3.2.1	Synchronisation	76
3.2.2	Déclenchement des échanges	77
III	Applications en régime permanent	81
1	Cas de validation	85
1.1	Ecoulement sur une plaque plane	85
1.1.1	Etude des coefficients de couplage	85
1.1.2	Validation avec une solution analytique	92
1.1.3	Comparaison système couplé/système non couplé	95
1.2	Ecoulement autour d'une aube	95
1.2.1	Description du problème	96
1.2.2	Validation du calcul couplé	99
2	Refroidissement de paroi multiperforée	103
2.1	Introduction	103
2.1.1	Paramètres géométriques	105
2.1.2	Paramètres aérodynamiques	105
2.2	Modélisation	106
2.2.1	Configuration	106
2.2.2	Domaines de calcul	107
2.2.3	Modèle de turbulence	109
2.3	Résultats	109
2.3.1	Plan(y,z)	110
2.3.2	Plan(x,y)	111
2.3.3	Plan(x,z)	113
IV	Couplage thermique fluide-structure instationnaire	117
1	Introduction	119

2 Méthodes de couplage instationnaire	123
2.1 Approche instationnaire dans le fluide	123
2.2 Approche stationnaire dans le fluide	123
2.2.1 Algorithmes de couplage	124
2.2.2 Déclenchement dynamique des échanges	129
3 Application : écoulement sur une plaque plane	131
3.1 Choix des conditions de raccord	133
3.2 Validation expérimentale	133
3.2.1 Mesures expérimentales	133
3.2.2 Calcul numérique	136
3.2.3 Résultats et interprétations	137
3.3 Comparaison des méthodes de couplage	137
3.3.1 Calcul laminaire	139
3.3.2 Calcul turbulent	142
3.4 Conclusion	149
Conclusion générale	151
A Etude théorique de la plaque plane	155
A.1 Problème de Blasius	155
A.2 Problème thermique	156
B Etude de stabilité	161
B.1 Modèle Dirichlet-Fourier	161
B.2 Modèle Fourier-Fourier	164
C Fonctionnement de MpCCI	167
C.1 Structure	167
C.2 Algorithmes de recherche géométrique	171
C.2.1 Le pré-contact géométrique	171
C.2.2 Critère de rejet	171
D Algorithmes de couplage instationnaire	173
D.1 Cas général	173
D.2 Cas particulier	176

« Ce qui a été cru partout, par tous et pour toujours, a toutes les chances d'être faux. »

Paul Valéry

Introduction

La simulation numérique des phénomènes couplés a connu un essor constant ces dernières années. Ce développement est dû en particulier à l'accroissement des performances des calculateurs. Parmi ces phénomènes se trouvent les interactions fluide-structure. Elles mettent en jeu une structure mobile, rigide ou déformable et un fluide liquide ou gazeux, en écoulement autour ou contre une partie de la structure. Ces phénomènes sont dits couplés parce que l'évolution de chacun des milieux dépend de celle de l'autre. Ainsi, une élévation de température dans le milieu solide entraîne une variation du flux convectif à la paroi donc la modification de l'écoulement.

Il existe un très grand nombre de phénomènes couplés. Ils sont omniprésents et extrêmement variés. On peut citer les phénomènes hydroélastiques (fluide en phase liquide) : écoulements autour d'un navire ou d'un sous-marin, écoulement à l'intérieur de conduites, mouvement de liquide dans un réservoir. On distingue également les phénomènes aéroélastiques (fluide en phase gazeuse) : écoulement autour de véhicules aériens (avions, missiles...) et terrestres (train, automobile), influence du vent autour de constructions souples (ponts suspendus).

Le but de cette thèse est l'étude d'un phénomène couplé en particulier, à savoir les interactions thermiques fluide-structure, en d'autres termes le couplage convection-conduction. La description des phénomènes thermiques couplés est en effet essentielle car elle intervient dans la plupart des systèmes industriels. En particulier, dans les moteurs aéronautiques, l'augmentation constante de la température des gaz en sortie de chambre de combustion pose un véritable problème quant aux interactions avec les pièces mécaniques telles que les aubes de turbine haute pression. En effet, la température de ces gaz se situent au delà des limites de fusion des matériaux employés. Il est donc crucial d'une part de quantifier l'échauffement des pièces et d'autre part d'étudier les divers systèmes de refroidissement mis en place. Parmi les autres applications, on peut également citer l'étude du refroidissement de paroi de chambre de combustion. Le principe est de percer la paroi de plusieurs milliers de trous et d'y injecter de l'air « froid » (par rapport à la température des gaz de combustion) qui vient lécher la face interne de la chambre et constitue ainsi une protection thermique.

On voit bien dans ces deux exemples caractéristiques que la prise en compte des interactions fluide-structure est obligatoire si l'on veut décrire et quantifier avec précision les échanges thermiques à l'interface des deux milieux.

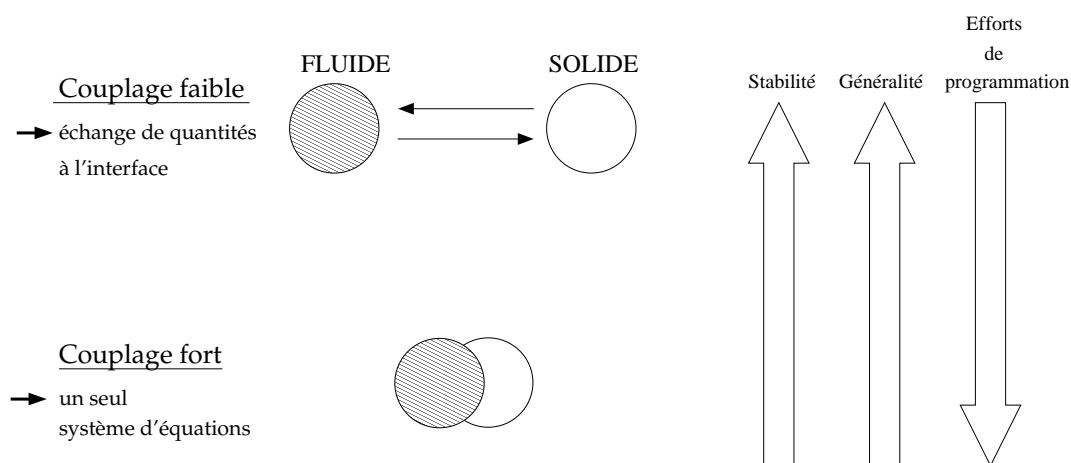
Il existe essentiellement deux approches pour appréhender un problème couplé. La première est de résoudre simultanément les problèmes fluide et solide. En d'autres termes, on considère le système global formé des équations qui gouvernent chaque milieu. La discrétisation

de ce système global s'effectue en général à l'aide d'un schéma numérique monolithique. On aboutit à la résolution d'un système itératif global linéarisé. Le couplage est dit fort car tous les points du milieu solide interagissent avec les points du milieu fluide et inversement. On peut citer les travaux de Hübner[39] qui a étudié le problème fluide-structure en utilisant une approche éléments finis, ou encore Blom[5] qui a considéré une discrétisation en volumes finis. Le principal avantage de cette méthode globale est la précision des résultats. En revanche, elle est assez peu générale car elle nécessite d'être adaptée à chaque problème couplé. De plus, les physiques couplées étant souvent de nature différente, le système linéaire est en général mal conditionné, ce qui engendre des problèmes de stabilité. Enfin, la résolution numérique peut s'avérer très lourde pour des systèmes qui possèdent un grand nombre de degrés de liberté. Enfin, cette méthode impose un schéma d'intégration unique pour résoudre les systèmes fluide et solide.

La deuxième approche est de traiter les problèmes fluide et solide de façon indépendante. Dans ce cas, le couplage est évalué uniquement à l'interface entre les deux milieux au moyen de conditions aux limites ou conditions de raccord. Ce couplage est dit faible car on ne considère que les interactions au niveau de l'interface fluide-solide. Cette approche permet de définir de méthodes numériques différentes, adaptées à la physique de chaque milieu. En particulier, elle donne la possibilité d'utiliser des codes de calcul déjà existants et spécialisés dans chaque domaine. En outre, plus générale que la précédente, elle permet de résoudre des systèmes complexes faisant apparaître des non-linéarités importantes. Il existe un très grand nombre d'études qui se rapportent à cette méthode de couplage. On citera surtout celles de Piperno[48][49][50] et de Farhat[24] qui ont décrit un certain nombre d'algorithmes de couplage faible. Divo et Kassab[15][14] ont quant à eux abordé plus précisément le problème thermique stationnaire en couplant deux codes de calcul. Ils utilisent un code fluide basé sur une discrétisation en volumes finis et un code solide sur une discrétisation en éléments finis. Le couplage s'effectue à l'interface par des échanges flux de chaleur-température entre les deux milieux.

La figure 1 résume de façon simplifiée les avantages et les inconvénients de chacune des approches. Pour résumer, la méthode de couplage fort serait celle à envisager si l'on veut décrire avec précision toutes les interactions entre les deux milieux. Cependant, elle est trop difficile à mettre en œuvre numériquement et surtout pas assez générale : il faut redéfinir une stratégie de couplage adaptée à chaque cas. Par opposition, la méthode dite faible possède cette généralité car on se limite aux interactions via l'interface, sans remettre en cause la résolution des problèmes fluide et solide. De plus, elle est de ce fait plus simple à mettre en œuvre du point de vue numérique. L'enjeu de cette méthode se résume à la stabilisation du schéma de couplage considéré à l'interface.

C'est logiquement l'approche faible du couplage que nous allons étudier dans cette thèse, ce qui va nous permettre d'appréhender les interactions fluide-structure par l'intermédiaire d'un couplage de codes. En effet, la description de chaque milieu sera prise en charge par un code différent. Pour la partie fluide, on utilisera le code de mécanique des fluides MSD, dont l'approche est de type volumes finis et pour le solide le code de mécanique des structures ZeBuLoN, de type éléments finis. Le couplage à l'interface entre ces deux codes sera pris en charge par la bibliothèque MpCCI qui assurera les échanges de quantités physiques à l'interface.

FIG. 1 – *Différentes approches du couplage*

Le plan de la thèse est divisé en quatre grandes parties. Dans la première, nous décrirons les discrétisations spatiale et temporelle dans les codes MSD et ZeBuLoN. Nous mettrons en évidence l'approche pseudo-stationnaire dans le fluide par opposition à une approche plus stationnaire dans le solide. Dans la deuxième partie, nous introduirons plusieurs méthodes de couplage en régime permanent qui dérivent des méthodes de décomposition de domaine, à savoir la résolution des problèmes fluide et solide séparément et le couplage à l'interface par l'intermédiaire de conditions aux limites appelées conditions de raccord. Nous étudierons en particulier la stabilité de ces conditions de raccord en fonction de coefficients de couplage à l'interface. Dans la troisième partie, nous mettrons en application les méthodes décrites sur deux cas de validation. Le premier est un écoulement sur une plaque plane et le deuxième est l'étude du refroidissement d'une aube de turbine. Nous validerons les résultats expérimentalement et par l'intermédiaire d'un modèle analytique en ce qui concerne la plaque plane. Nous verrons enfin un cas plus complexe et caractéristique du couplage fluide-solide, à savoir le refroidissement d'une paroi multiperforée par « film cooling ». Dans la quatrième partie, nous aborderons le couplage en régime transitoire. Nous décrirons plusieurs algorithmes de couplage qui répondent aux besoins industriels, notamment en matière de temps de calcul. Nous étudierons plusieurs conditions de raccord et nous donnerons le meilleur choix en matière de stabilité et de convergence. Nous validerons enfin la méthode sélectionnée grâce à des mesures expérimentales instationnaires en convection forcée sur une plaque plane.

Première partie

Modélisation numérique

Chapitre 1

Modélisation dans le fluide

1.1 Modèle physique

1.1.1 Equations de bilan

Le code MSD[54] modélise les écoulements compressibles réactifs multi-espèces turbulents. Le fluide est considéré comme un mélange de gaz parfaits et ses propriétés sont déterminées par les caractéristiques de chaque espèce qui le compose. Chaque gaz g est caractérisé par sa masse molaire m_g (dont est déduite la constante de la loi de Mariotte r_g), sa chaleur spécifique à pression constante $C_{p_g}(T)$, sa masse volumique $\rho_g = \rho y_g$ (où y_g est la fraction massique de l'espèce g dans le mélange), son énergie interne e_g , son enthalpie h_g et sa viscosité moléculaire μ_g . Les équations d'état du fluide sont de la forme :

$$p = \sum_g \rho_g r_g T = \rho r T$$
$$e = \sum_g y_g e_g = e(y_g, T)$$

La viscosité moléculaire μ et la conductivité thermique λ du mélange sont fonction des quantités $\mu_g(T)$ et $\lambda_g(T)$ liées à chaque espèce. La diffusion de masse d_g de g dans le mélange obéit à la loi de Fick :

$$d_g = \frac{\mu}{Sc_t} \quad (1.1)$$

où Sc_t est le nombre de Schmidt.

On s'intéresse ici aux gaz mono-espèce. On intègre les équations de Navier-Stokes classiques :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{u}) = 0 \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) = -\vec{\nabla} p + \text{div}\left(\vec{\tau}_v\right) + \rho \vec{f} \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{u} E) = -\text{div}(p \vec{u}) + \text{div}\left(\vec{\tau}_v \cdot \vec{u}\right) + \rho \vec{f} \cdot \vec{u} - \text{div}(\vec{q}), \quad (1.4)$$

avec respectivement les lois de comportement des gaz parfaits, de l'énergie totale, de l'enthalpie et de diffusion des flux visqueux :

$$\begin{aligned}
 p &= \rho r T \\
 E &= e(T) + \frac{\|\vec{u}\|^2}{2} \\
 h &= e + \frac{P}{\rho} = \int_{T_{ref}}^T c_p(T) dT + h_{ref} \\
 \vec{\tau}_v &= \mu(T) \left(\vec{\nabla} u + \vec{\nabla} u^T - \frac{2}{3} \text{div}(\vec{u}) \vec{\mathcal{I}} \right) \\
 \vec{q} &= \lambda(T) \vec{\nabla} T = \frac{\mu(T) c_p(T)}{Pr} \vec{\nabla} T
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

1.1.2 Modélisation de la turbulence

Equations moyennes

Dans le code MSD, la turbulence est traitée par la résolution des équations de Navier-Stokes moyennées (R.A.N.S) et l'utilisation d'un modèle de fermeture. Pour obtenir ces équations moyennes, on décompose chaque variable f en une partie moyenne \bar{f} et une partie fluctuante f' (décomposition de Reynolds). On introduit cette décomposition dans les équations instantanées et on prend la moyenne. Pour les grandeurs intensives telles que la vitesse et la température, on utilise la moyenne de Favre[25]. Contrairement à la décomposition de Reynolds, cette dernière est pondérée par la masse volumique ρ , ce qui permet d'éliminer un nombre important de corrélations et ainsi obtenir une modélisation de la turbulence analogue à celle des écoulements incompressibles. On notera respectivement \bar{f} et f'' les parties moyenne et fluctuante de f au sens de Favre, avec $\bar{f} = \frac{\overline{\rho f}}{\bar{\rho}}$. On en déduit quelques propriétés des moyennes de Reynolds et de Favre :

$$\begin{array}{lll}
 \overline{f+g} = \bar{f} + \bar{g} & \overline{\alpha f} = \alpha \bar{f} & \overline{\bar{f}} = \bar{f} \\
 \overline{\bar{f} \cdot g} = \bar{f} \cdot \bar{g} & \overline{\frac{\partial f}{\partial t}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial t} & \overline{\frac{\partial f}{\partial x_i}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i} \\
 \overline{\rho f''} = 0 & \overline{f' g''} = \overline{f'' g'} = \overline{f' g'} & \overline{f''} = \frac{\overline{\rho f'} - \bar{\rho} \bar{f}}{\bar{\rho}} = -\frac{\overline{\rho' f'}}{\bar{\rho}},
 \end{array}$$

Les équations de Navier-Stokes moyennes s'écrivent :

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \text{div}(\bar{\rho} \vec{u}) = 0 \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial (\bar{\rho} \vec{u})}{\partial t} + \text{div}(\bar{\rho} \vec{u} \otimes \vec{u} + \bar{p} \vec{\mathcal{I}} - \vec{\tau}_v - \vec{\tau}_t) = \bar{\rho} \vec{f} \tag{1.7}$$

$$\frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{E})}{\partial t} + \text{div}(\bar{\rho} \vec{u} \tilde{H} - (\vec{\tau}_v + \vec{\tau}_t) \cdot \vec{u} - \vec{\varphi}_k - \vec{\varphi}_c) = \bar{\rho} \vec{f} \cdot \vec{u} \tag{1.8}$$

avec les lois suivantes :

$$\begin{aligned}
 \bar{p} &= \bar{\rho} r \tilde{T} \\
 \overrightarrow{\tau}_v &= \mu \left(\tilde{T} \right) \left(\overrightarrow{\nabla} \tilde{u} + \overrightarrow{\nabla} \tilde{u}^t - \frac{2}{3} \text{div} \left(\tilde{u} \right) \overrightarrow{\mathcal{I}} \right) \\
 \overrightarrow{\tau}_t &= -\widetilde{\bar{\rho} u''} \otimes u'' \\
 \vec{\varphi}_k &= \vec{\varphi}_{kv} + \vec{\varphi}_{kt} = \overrightarrow{\tau}_v . u'' + \tilde{\rho} \frac{\tilde{u}''^2}{2} u'' \\
 \vec{\varphi}_c &= \vec{\varphi}_{cv} + \vec{\varphi}_{ct} = -\lambda \left(\tilde{T} \right) \overrightarrow{\nabla} \tilde{T} + \bar{\rho} C_p (\tilde{T}) \widetilde{u'' T''} \\
 \tilde{E} &= e \left(\tilde{T} \right) + \frac{\tilde{u}^2}{2} + k \\
 \tilde{H} &= h \left(\tilde{T} \right) + \frac{\tilde{u}^2}{2} + k = e \left(\tilde{T} \right) + \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}} + \frac{\tilde{u}^2}{2} + k \\
 k &= \frac{\widetilde{u''_i u''_i}}{2}
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

$\vec{\varphi}_k$ et $\vec{\varphi}_c$ sont respectivement le flux chaleur et le flux de l'énergie cinétique turbulente k . Chacun de ces flux se décompose en un terme de diffusion moléculaire et un terme de diffusion turbulente. $\overrightarrow{\tau}_t$ est le tenseur de Reynolds. Celui-ci introduit des inconnues supplémentaires qui nécessitent la création d'équations complémentaires données par les modèles de fermeture.

Modèles de fermeture

Les modèles de fermeture que l'on trouve dans MSD sont de type BVM (Boussinesq Viscosity Models), basés sur une analogie entre les diffusions turbulente et moléculaire en introduisant la viscosité turbulente ν_t . On peut donc écrire les flux définis plus haut sous la forme :

$$\overrightarrow{\tau}_t = \mu_t \overrightarrow{\tau}_v - \frac{2}{3} \bar{\rho} k \overrightarrow{\mathcal{I}} \tag{1.10}$$

$$\vec{\varphi}_c = \left(\lambda + \frac{\mu_t C_p}{Pr_t} \right) \overrightarrow{\nabla} \tilde{T} \tag{1.11}$$

$$\vec{\varphi}_k = \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \overrightarrow{\nabla} k \tag{1.12}$$

$$\mu_t = \bar{\rho} \nu_t \tag{1.13}$$

Tout le problème est donc de modéliser le coefficient de diffusion turbulente ν_t . Nous allons pour cela utiliser des modèles de fermeture à deux équations de transport. Il existe deux modèles de ce type dans le code MSD : le modèle $k - \epsilon$ et le modèle $k - \mathcal{L}$. Il s'agit dans les deux cas de définir les échelles de longueur et de vitesse de la turbulence. Nous présentons brièvement ces deux modèles.

Modèle $k - \epsilon$ haut Reynolds

Par analogie avec les équations de Navier-Stokes moyennes, on définit une équation de transport pour l'énergie cinétique turbulente k et le taux de dissipation ϵ :

$$\frac{\partial \bar{\rho} k}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\bar{\rho} \vec{u} k - \vec{\varphi}_k) = \bar{\rho} \mathcal{W}_k \quad (1.14)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho} \epsilon}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\bar{\rho} \vec{u} \epsilon - \vec{\varphi}_\epsilon) = \bar{\rho} \mathcal{W}_\epsilon \quad (1.15)$$

Les flux sont définis au moyen de la viscosité turbulente μ_t :

$$\vec{\varphi}_k = \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \vec{\nabla} k \quad (1.16)$$

$$\vec{\varphi}_\epsilon = \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \vec{\nabla} \epsilon \quad (1.17)$$

On construit ν_t à l'aide de k et ϵ de la façon suivante :

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad C_\mu = 0,09 \quad (1.18)$$

Cette expression découle de l'hypothèse de Bradshaw supposant la proportionnalité entre le tenseur de Reynolds et l'énergie cinétique turbulente, ce qui donne dans le cas incompressible : $\pm \overline{u'_i u'_j} = k \sqrt{c}$ avec c constante. σ_k et σ_ϵ sont fixés empiriquement à partir de résultats expérimentaux simples. En général, on a :

$$\begin{aligned} 1,0 &\leq \sigma_k \leq 1,225 \\ 1,1 &\leq \sigma_\epsilon \leq 1,3 \end{aligned} \quad (1.19)$$

\mathcal{W}_k et \mathcal{W}_ϵ sont des termes sources. Ils sont de la forme :

$$\mathcal{W}_k = P - \epsilon \quad (1.20)$$

$$\mathcal{W}_\epsilon = C_{\epsilon 1} \frac{\epsilon P}{k} - C_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{k} \quad (1.21)$$

$$P = 2\nu_t \vec{\vec{D}} : \vec{\vec{D}} - \frac{2}{3} k \operatorname{div}(\vec{\vec{u}})$$

$$\vec{\vec{D}} = \frac{1}{2} \left(\vec{\vec{\nabla}} \vec{\vec{u}} + \vec{\vec{\nabla}}^t \vec{\vec{u}} - \frac{2}{3} \operatorname{div}(\vec{\vec{u}}) \vec{\vec{I}} \right)$$

$$C_{\epsilon 1} = 1,44$$

$$C_{\epsilon 2} = 1,92 \quad (1.22)$$

P est le terme de production de l'énergie cinétique turbulente issu de l'interaction entre les gradients de l'écoulement moyen et les fluctuations.

Modèle $k - \mathcal{L}$ haut Reynolds

L'équation de transport de \mathcal{L} est obtenue très simplement à partir de celle du modèle $k - \epsilon$. En effet, il suffit de faire les changements de variable $\mathcal{L} = C_\epsilon \frac{k^{\frac{3}{2}}}{\epsilon}$ et $C_\epsilon = C_\mu^{\frac{3}{4}}$:

$$\frac{\partial \bar{\rho} \mathcal{L}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\bar{\rho} \vec{u} \mathcal{L} - \vec{\varphi}_{\mathcal{L}}) = \bar{\rho} \mathcal{W}_{\mathcal{L}}$$

avec :

$$\vec{\varphi}_{\mathcal{L}} = \frac{3}{2} \left(\frac{\mathcal{L}}{k} \right) \vec{\varphi}_k - \left(\frac{\mathcal{L}}{\epsilon} \right) \vec{\varphi}_\epsilon$$

Le terme source $\mathcal{W}_{\mathcal{L}}$ s'écrit comme suit :

$$\mathcal{W}_{\mathcal{L}} = \frac{3}{2} \left(\frac{\mathcal{L}}{k} \right) \mathcal{W}_k - \left(\frac{\mathcal{L}}{\epsilon} \right) \mathcal{W}_\epsilon - \left[\frac{3}{2} \vec{\varphi}_k \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{\mathcal{L}}{k} \right) - \vec{\varphi}_\epsilon \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{\mathcal{L}}{\epsilon} \right) \right]$$

En injectant les termes sources \mathcal{W}_k et \mathcal{W}_ϵ dans l'expression de $\mathcal{W}_{\mathcal{L}}$, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{\mathcal{L}} = & C_\epsilon \sqrt{k} \left[\underbrace{\frac{P}{\epsilon} \left(\frac{3}{2} - C_{\epsilon 1} \right) + C_{\epsilon 2} - \frac{3}{2}}_{C_{\mathcal{L}}} \right] \\ & - \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{1}{\mathcal{L}} \left[b_{\mathcal{L}\mathcal{L}} \vec{\nabla} \mathcal{L} \cdot \vec{\nabla} \mathcal{L} + \frac{\mathcal{L}^2}{k^2} b_{kk} \vec{\nabla} k \cdot \vec{\nabla} k + \frac{1}{k} b_{k\mathcal{L}} \vec{\nabla} k \cdot \vec{\nabla} \mathcal{L} \right] \end{aligned}$$

Les constantes $C_{\mathcal{L}}$, $b_{\mathcal{L}\mathcal{L}}$, b_{kk} , $b_{k\mathcal{L}}$ sont liées à celles du modèle $k - \epsilon$. Dans le code MSD, elles valent :

$$\begin{aligned} C_{\mathcal{L}} &= 0,125 \\ b_{\mathcal{L}\mathcal{L}} &= 2,0 \\ b_{kk} &= \frac{3}{2} \left(\frac{3}{2} - \frac{\sigma_\epsilon}{\sigma_k} \right) \\ b_{k\mathcal{L}} &= -\frac{3}{2} \left(3 - \frac{\sigma_\epsilon}{\sigma_k} \right) \end{aligned}$$

Modèle $k - \mathcal{L}$ bas Reynolds

C'est le modèle que nous utiliserons par la suite. L'idée de base de la démarche de Dutoya[17] est de remplacer le calcul de la dissipation turbulente présentant un profil extrêmement raide à la paroi et d'une interprétation physique peu évidente, par celui de la longueur de mélange \mathcal{L} . Dans les écoulements de type couche limite, \mathcal{L} est nul à la paroi, croît ensuite linéairement avec une pente égale à la constante de Von-Karman κ et prend une valeur sensiblement constante dans la zone de turbulence homogène. L'équation donnant un tel comportement est obtenue en réarrangeant les termes de l'équation haut Reynolds :

$$\rho \frac{d\mathcal{L}}{dt} = \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{\mathcal{L}}} \right) \Delta \mathcal{L} + \frac{\mu}{\mathcal{L}} \left(\kappa^2 - \left(\vec{\nabla} \mathcal{L} \right)^2 \right) + \frac{\mu_t}{\sigma_{\mathcal{L}} \mathcal{L}} \left(\kappa^2 - \left(\vec{\nabla} \mathcal{L} \right)^2 \right) \quad (1.23)$$

En utilisant les formules de décomposition tensorielle, le terme de diffusion de l'équation (1.23) s'écrit :

$$\begin{aligned} \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{\mathcal{L}}} \right) \Delta \mathcal{L} &= \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{\mathcal{L}}} \right) \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \mathcal{L} \right) \\ &= \vec{\nabla} \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{\mathcal{L}}} \right) \vec{\nabla} \mathcal{L} \right] - \vec{\nabla} \mathcal{L} \cdot \vec{\nabla} \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{\mathcal{L}}} \right) \end{aligned} \quad (1.24)$$

Le dernier terme de l'équation (1.24) fait intervenir le produit de μ_t avec le gradient de \mathcal{L} . Or, la viscosité turbulente s'écrit $\mu_t = f_{\mu} C_{\mu}^{\frac{1}{4}} \sqrt{k} \mathcal{L}$ où f_{μ} est une fonction correctrice bas Reynolds. Le développement de ce terme fait donc apparaître la forme bilinéaire :

$$\vec{\nabla} \mathcal{L} \cdot \vec{\nabla} \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{\mathcal{L}}} \right) = \alpha_{\mathcal{L}\mathcal{L}} \vec{\nabla} \mathcal{L} \cdot \vec{\nabla} \mathcal{L} + \alpha_{k\mathcal{L}} \vec{\nabla} k \cdot \vec{\nabla} \mathcal{L} + \alpha_{kk} \vec{\nabla} k \cdot \vec{\nabla} k \quad (1.25)$$

Finalement, le modèle $k - \mathcal{L}$ bas Reynolds s'écrit sous la forme générique :

$$\begin{aligned} \rho \frac{dk}{dt} &= \vec{\nabla} \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \vec{\nabla} k \right] \\ &\quad + \left(P_k - \rho C_{\epsilon} f_{\epsilon} \frac{k^{\frac{3}{2}}}{\mathcal{L}} - \rho D_k \right) \\ \rho \frac{d\mathcal{L}}{dt} &= \vec{\nabla} \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{\mathcal{L}}} \right) \vec{\nabla} \mathcal{L} \right] \\ &\quad + \frac{\mu}{\mathcal{L}} \left(\kappa^2 - \left(\vec{\nabla} \mathcal{L} \right)^2 \right) + \frac{\mu_t}{\sigma_{\mathcal{L}} \mathcal{L}} \left(\alpha_{\kappa} \kappa^2 - \left(\vec{\nabla} \mathcal{L} \right)^2 \right) \\ &\quad - \alpha_{\mathcal{L}\mathcal{L}} \vec{\nabla} \mathcal{L} \cdot \vec{\nabla} \mathcal{L} + \alpha_{k\mathcal{L}} \vec{\nabla} k \cdot \vec{\nabla} \mathcal{L} + \alpha_{kk} \vec{\nabla} k \cdot \vec{\nabla} k \end{aligned} \quad (1.26)$$

D_k	$\nu \frac{\kappa^2 k}{\mathcal{L}^2}$
$\alpha_{\mathcal{L}\mathcal{L}}$	$\frac{\mu_t}{\mathcal{L}\sigma_{\mathcal{L}}} \left(\frac{1 - f_\mu^2}{f_\mu} \frac{Re_t}{Re_\mu} \right)$
$\alpha_{k\mathcal{L}}$	0
α_{kk}	0
f_μ	$\tanh\left(\frac{\mathcal{R}_\nu}{\mathcal{R}_\epsilon}\right)$
C_μ	0,09
\mathcal{R}_ν	21,3
\mathcal{R}_ϵ	16,8
σ_k	0,9
$\sigma_{\mathcal{L}}$	1

FIG. 1.1 – Coefficients du modèle $k - \mathcal{L}$ bas Reynolds

- f_μ est la fonction correctrice du modèle $k - \epsilon$.
- D_k est un terme de dissipation supplémentaire identique à celui du modèle $k - \epsilon$.
- f_ϵ est une fonction qui force le terme de dissipation haut Reynolds à devenir nul à la paroi de telle sorte que la dissipation totale soit égale à D_k .
- le coefficient α_κ corrige la turbulence lorsque celle-ci n'est pas en équilibre. Cette correction n'est pas prise en compte dans le modèle (1.23) mais peut être intéressante pour les cas de turbulence en fort déséquilibre.

Les différents termes correctifs sont donnés par le tableau 1.1

1.2 Discrétisation

On cherche à discrétiser les équations de bilan de la forme :

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \text{div}(\vec{F}_E(\mathbf{q}) + \vec{F}_V(\mathbf{q})) = S(\mathbf{q}) \quad (1.27)$$

\mathbf{q} est le vecteur d'état constitué des variables conservatives. \vec{F}_E et \vec{F}_V sont les tenseurs des flux Euler et visqueux. S est un terme source.

Contrairement aux schémas de type Lax-Wendorff[42], les discrétisations spatiale et temporelle dans MSD sont totalement indépendantes.

1.2.1 Discrétisation spatiale

Les équations sont discrétisées sur un maillage structuré. Les points de l'espace physique sont définis dans le repère orthonormé à l'aide des coordonnées (x, y, z) . Le maillage

est constitué d'un empilement d'héxaèdres suivant trois directions topologiques (I, J, K) déduites des coordonnées physiques (x, y, z) à l'aide d'une transformation de l'espace ϕ telle que $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \phi(x, y, z)$ (FIG. 1.2). Chaque héxaèdre est repéré par ses trois indices (i, j, k) . En notant \mathcal{J} le Jacobien de cette transformation, l'équation (1.27) devient, dans l'espace (I, J, K) :

$$\frac{\partial(\frac{\mathbf{q}}{\mathcal{J}})}{\partial t} + \text{div}_{\xi} \left(\vec{F}_E(\mathbf{q}) + \vec{F}_V(\mathbf{q}) \cdot \frac{\vec{\nabla} \phi^T}{\mathcal{J}} \right) = \frac{S(\mathbf{q})}{\mathcal{J}} \quad (1.28)$$

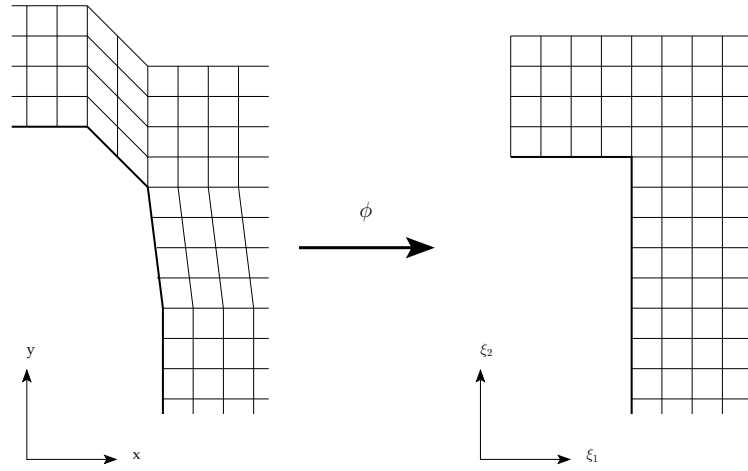


FIG. 1.2 – Transformation des coordonnées en deux dimensions

L'approche volumes finis standard consiste à intégrer le bilan (1.28) sur chacun des héxaèdres appelés aussi cellules ou volumes de contrôle. On note respectivement $\Sigma_{i,j,k}^i, \Sigma_{i,j,k}^j, \Sigma_{i,j,k}^k$ les facettes de la cellule (i, j, k) suivant les trois directions I, J, K et $\vec{S}_{i,j,k}^i, \vec{S}_{i,j,k}^j, \vec{S}_{i,j,k}^k$ les vecteurs surface associés. Le volume de la cellule (i, j, k) est noté $\mathcal{V}_{i,j,k}$ et son barycentre $C_{i,j,k}$ (FIG. 1.3).

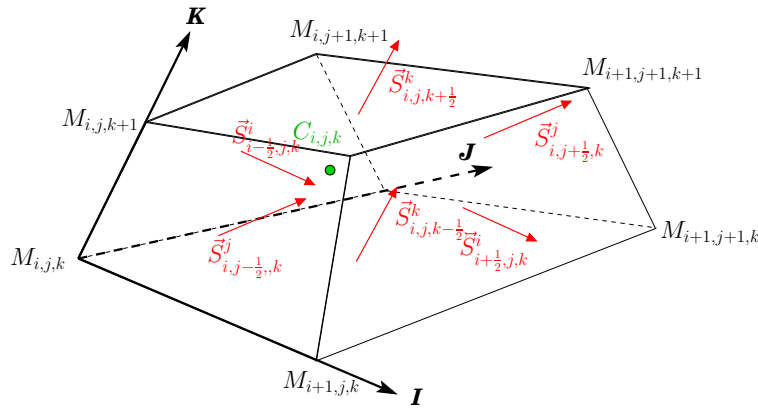


FIG. 1.3 – Volume de controle (i, j, k)

L'équation d'évolution sur la cellule (i, j, k) donne :

$$\frac{\partial \mathbf{q}_{i,j,k}^*}{\partial t} + \sum_{\alpha=i,j,k} \left[\left(F_{E_{\alpha+\frac{1}{2}}}^*(\mathbf{q}) + F_{V_{\alpha+\frac{1}{2}}}^*(\mathbf{q}) \right) - \left(F_{E_{\alpha-\frac{1}{2}}}^*(\mathbf{q}) + F_{V_{\alpha-\frac{1}{2}}}^*(\mathbf{q}) \right) \right] = S_{i,j,k}^*(\mathbf{q}) \quad (1.29)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{i,j,k}^* &= \mathcal{V}_{i,j,k} \mathbf{q}_{i,j,k} \\ S_{i,j,k}^* &= \mathcal{V}_{i,j,k} S(\mathbf{q}_{i,j,k}) \\ F_{E_{i-\frac{1}{2}}}^* &= \int \int_{\Sigma_{i-\frac{1}{2},j,k}^i} \vec{F}_E \cdot d\vec{S} \approx \vec{F}_{E_{i-\frac{1}{2},j,k}} \cdot \vec{S}_{i-\frac{1}{2},j,k}^i \\ F_{E_{i+\frac{1}{2}}}^* &= \int \int_{\Sigma_{i+\frac{1}{2},j,k}^i} \vec{F}_E \cdot d\vec{S} \approx \vec{F}_{E_{i+\frac{1}{2},j,k}} \cdot \vec{S}_{i+\frac{1}{2},j,k}^i \\ F_{E_{j-\frac{1}{2}}}^* &= \int \int_{\Sigma_{i,j-\frac{1}{2},k}^j} \vec{F}_E \cdot d\vec{S} \approx \vec{F}_{E_{i,j-\frac{1}{2},k}} \cdot \vec{S}_{i,j-\frac{1}{2},k}^j \\ F_{E_{j+\frac{1}{2}}}^* &= \int \int_{\Sigma_{i,j+\frac{1}{2},k}^j} \vec{F}_E \cdot d\vec{S} \approx \vec{F}_{E_{i,j+\frac{1}{2},k}} \cdot \vec{S}_{i,j+\frac{1}{2},k}^j \\ F_{E_{k-\frac{1}{2}}}^* &= \int \int_{\Sigma_{i,j,k-\frac{1}{2}}^k} \vec{F}_E \cdot d\vec{S} \approx \vec{F}_{E_{i,j,k-\frac{1}{2}}} \cdot \vec{S}_{i,j,k-\frac{1}{2}}^k \\ F_{E_{k+\frac{1}{2}}}^* &= \int \int_{\Sigma_{i,j,k+\frac{1}{2}}^k} \vec{F}_E \cdot d\vec{S} \approx \vec{F}_{E_{i,j,k+\frac{1}{2}}} \cdot \vec{S}_{i,j,k+\frac{1}{2}}^k \end{aligned}$$

Les indices $\pm \frac{1}{2}$ indiquent que les flux sont évalués sur les faces amont et aval de la cellule. C'est par le calcul de ces flux que les schémas numériques se distinguent.

Flux Euler

Dans MSD, les flux Euler sont évalués grâce à des schémas décentrés, qui prennent en compte les directions de propagation. Ils sont tous basés sur des solveurs de Riemann approchés censés calculer, pour des problèmes 1D, la valeur du flux à l'interface de deux milieux où les états sont constants à gauche et à droite (respectivement \mathbf{q}_g et \mathbf{q}_d).

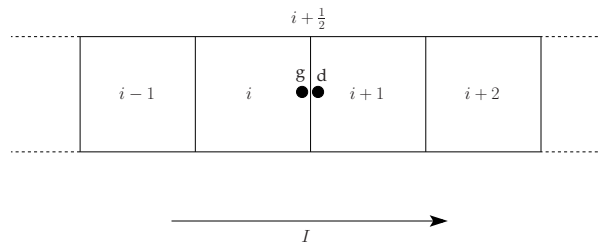


FIG. 1.4 – Extrapolation MUSCL

Schémas décentrés d'ordre 1

Soit $i + \frac{1}{2}$ l'interface entre deux cellules quelconques i et $i + 1$ dans la direction I (voir FIG. 1.4). En outre, si l'on note \mathbf{f} le flux Euler \vec{F}_E et $A = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}}$ le Jacobien de ce flux, on dénombre trois types de schémas décentrés dans MSD, tous dérivés du schéma de Roe [52] :

- schéma de Roe :

$$\begin{aligned} F_{E_I}^* &= \frac{\mathbf{f}(\mathbf{q}_g) + \mathbf{f}(\mathbf{q}_d)}{2} + \frac{1}{2}|A_I|(\mathbf{q}_g - \mathbf{q}_d) \\ A_I &= A(\mathbf{q}_I) \end{aligned} \quad (1.30)$$

- schéma ODF (décentrement des flux) :

$$\begin{aligned} F_{E_I}^* &= \frac{\mathbf{f}(\mathbf{q}_g) + \mathbf{f}(\mathbf{q}_d)}{2} + \frac{1}{2}\sigma_I(\mathbf{f}(\mathbf{q}_g) - \mathbf{f}(\mathbf{q}_d)) \\ \sigma_I &= \text{sgn}(A(\mathbf{q}_I)) = \text{sgn}(A_I) \end{aligned} \quad (1.31)$$

- schéma ODQ (décentrement des quantités) :

$$\begin{aligned} F_{E_I}^* &= \mathbf{f}(\mathbf{q}_{gd}) \\ \mathbf{q}_{gd} &= \frac{\mathbf{q}_g + \mathbf{q}_d}{2} + \frac{1}{2}\sigma_I(\mathbf{q}_g - \mathbf{q}_d) \\ \sigma_I &= \text{sgn}(A(\mathbf{q}_{gd})) = \text{sgn}(A_{gd}) \end{aligned} \quad (1.32)$$

Les matrices jacobiennes sont déterminées à l'aide des opérateurs signe et valeur absolue notés ψ . La décomposition est la suivante :

$$\psi(\mathcal{A}) = R \text{Diag}(\psi(\lambda_i)) L$$

R et L sont respectivement les matrices des vecteurs propres à droite et à gauche de \mathcal{A} et sont l'inverse l'une de l'autre. Les λ_i sont les valeurs propres associées.

L'état intermédiaire \mathbf{q}_I est évalué à l'aide des états à gauche et à droite \mathbf{q}_g et \mathbf{q}_d . La première solution est de faire une simple moyenne arithmétique :

$$\mathbf{q}_I = \frac{\mathbf{q}_g + \mathbf{q}_d}{2} \quad (1.33)$$

Une seconde solution, plus astucieuse, consiste à utiliser la moyenne de Roe dans laquelle les états \mathbf{q}_g et \mathbf{q}_d sont pondérés par la masse volumique à gauche et à droite :

$$\mathbf{q}_I = \frac{\sqrt{\rho_d}\mathbf{q}_g + \sqrt{\rho_g}\mathbf{q}_d}{\sqrt{\rho_g} + \sqrt{\rho_d}}$$

Schémas décentrés d'ordre supérieur ou égal à 2

Pour obtenir des schémas d'ordre supérieur, les états à gauche et à droite sont calculés à partir des états des cellules voisines. Ces expressions sont connues sous le nom d'extrapolation MUSCL (Monotonic Upstream Schemes for Conservation Laws). Si l'on considère l'interface aval suivant la direction I, à savoir $i + \frac{1}{2}$ (FIG. 1.4), on peut écrire (cf Errera [18]) les deux expressions symétriques :

$$\mathbf{q}_{g_{i+\frac{1}{2}}} = s^{--}\mathbf{q}_{i-1} + s^-\mathbf{q}_i + s^+\mathbf{q}_{i+1} + s^{++}\mathbf{q}_{i+2} \quad (1.34)$$

$$\mathbf{q}_{d_{i+\frac{1}{2}}} = s^{++}\mathbf{q}_{i-1} + s^+\mathbf{q}_i + s^-\mathbf{q}_{i+1} + s^{--}\mathbf{q}_{i+2} \quad (1.35)$$

Nous nous intéressons plus particulièrement à la classe des schémas où $s^{++} = 0$. On a alors, en posant $y = 1 - 2s^{++}$:

$$\mathbf{q}_{g_{i+\frac{1}{2}}} = \mathbf{q}_i + \frac{1}{2}y(\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_{i-1}) + \frac{1}{2}(1-y)(\mathbf{q}_{i+1} - \mathbf{q}_i) \quad (1.36)$$

$$\mathbf{q}_{d_{i+\frac{1}{2}}} = \mathbf{q}_{i+1} - \frac{1}{2}y(\mathbf{q}_{i+2} - \mathbf{q}_{i+1}) - \frac{1}{2}(1-y)(\mathbf{q}_{i+1} - \mathbf{q}_i)$$

y joue ici le rôle de paramètre de décentrement. En effet, $y = 1$ correspond à un schéma totalement décentré, $y = \frac{1}{3}$ est un schéma d'ordre trois, $y = \frac{1}{2}$ est un schéma de Van Leer et $y = 0$ correspond à un schéma centré. L'inconvénient de ces extrapolations linéaires est qu'elles engendrent des erreurs d'approximation importantes dans le cas où l'on a de fortes variations entre valeurs voisines. Le code possède donc des limiteurs de pente qui rendent les schémas non linéaires et interdisent l'apparition d'extrêma locaux, ce qui empêche les oscillations au voisinage des discontinuités. Ces limiteurs agissent sur chaque composante q du vecteur \mathbf{q} et sont de la forme :

$$R_{i+\frac{1}{2}}^- = \frac{|q_{i+1} - q_i|}{|q_i - q_{i-1}| - |q_{i+1} - q_i|}$$

$$R_{i+\frac{1}{2}}^+ = \frac{|q_{i+1} - q_i|}{|q_{i+2} - q_{i+1}| - |q_{i+1} - q_i|}$$

On en déduit les nouvelles fomules d'extrapolation :

$$\mathbf{q}_{g_{i+\frac{1}{2}}} = \mathbf{q}_i + \frac{1}{2}y_g(\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_{i-1}) + \frac{1}{2}(1-y_g)(\mathbf{q}_{i+1} - \mathbf{q}_i) \quad (1.37)$$

$$\mathbf{q}_{d_{i+\frac{1}{2}}} = \mathbf{q}_{i+1} - \frac{1}{2}y_d(\mathbf{q}_{i+2} - \mathbf{q}_{i+1}) - \frac{1}{2}(1-y_d)(\mathbf{q}_{i+1} - \mathbf{q}_i) \quad (1.38)$$

avec les limiteurs suivants :

– Limiteur n^o 1 :

$$y_g = \min \left(y, R_{i+\frac{1}{2}}^- \right)$$

$$y_d = \min \left(y, R_{i+\frac{1}{2}}^+ \right)$$

– Limiteur n^o 2 :

$$y_g = \min \left(R_{i+\frac{1}{2}}^-, \max \left(y, 2 - R_{i+\frac{1}{2}}^- \right) \right)$$

$$y_d = \min \left(R_{i+\frac{1}{2}}^+, \max \left(y, 2 - R_{i+\frac{1}{2}}^+ \right) \right)$$

– Limiteur n^o 3 :

$$y_g = \frac{y |q_{i+1} - q_i|}{y |q_{i+1} - q_i| + (1 - y) |q_i - q_{i-1}|}$$

$$y_d = \frac{y |q_{i+1} - q_i|}{y |q_{i+1} - q_i| + (1 - y) |q_{i+2} - q_{i+1}|}$$

Flux visqueux

Les gradients sont évalués au barycentre de chaque cellule à l'aide d'une formule de Green :

$$\int \int \int_{\Omega_{i,j,k}} \vec{\nabla} f d\Omega = \int \int_{\Sigma_{i,j,k}} f \vec{n} d\sigma$$

$$\int \int \int_{\Omega_{i,j,k}} \vec{\nabla} \mathbf{u} + \vec{\nabla} \mathbf{u}^T d\Omega = \int \int_{\Sigma_{i,j,k}} (\vec{\mathbf{u}} \otimes \vec{\mathbf{n}} + \vec{\mathbf{n}} \otimes \vec{\mathbf{u}}) d\sigma$$

$\Sigma_{i,j,k}$ désigne la frontière de la cellule (i,j,k) de volume $\Omega_{i,j,k}$. On utilise ici une approximation numérique centrée :

$$\vec{\nabla} f_{i,j,k} = \frac{1}{V_{i,j,k}} \int \int \int_{\Omega_{i,j,k}} \vec{\nabla} f d\Omega$$

$$\approx \frac{1}{V_{i,j,k}} \sum_{\alpha=i,j,k} \left(\vec{S}_+^\alpha f_{\alpha+\frac{1}{2}} - \vec{S}_-^\alpha f_{\alpha-\frac{1}{2}} \right)$$

$$\left(\vec{\nabla} \mathbf{u} + \vec{\nabla} \mathbf{u}^T \right)_{i,j,k} = \frac{1}{V_{i,j,k}} \int \int \int_{\Omega_{i,j,k}} \left(\vec{\nabla} \mathbf{u} + \vec{\nabla} \mathbf{u}^T \right) d\Omega$$

$$\approx \sum_{\alpha=i,j,k} \left[\left(\vec{\mathbf{u}}_{\alpha+\frac{1}{2}} \otimes \vec{S}_+^\alpha + \vec{S}_+^\alpha \otimes \vec{\mathbf{u}}_{\alpha+\frac{1}{2}} \right) - \left(\vec{\mathbf{u}}_{\alpha-\frac{1}{2}} \otimes \vec{S}_-^\alpha + \vec{S}_-^\alpha \otimes \vec{\mathbf{u}}_{\alpha-\frac{1}{2}} \right) \right]$$

\vec{S}_-^α et \vec{S}_+^α sont les vecteurs associés respectivement aux surfaces amont à aval de l'interface $\alpha + \frac{1}{2}$. Les flux aux interfaces $\alpha - \frac{1}{2}$ et $\alpha + \frac{1}{2}$ sont donnés par :

$$f_{\alpha-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (f_{\alpha-1} + f_\alpha) \quad f_{\alpha+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (f_\alpha + f_{\alpha+1})$$

Les coefficients de diffusion sont obtenus au barycentre des cellules en fonction des variables conservatives correspondantes $\mathbf{q}_{i,j,k}$. On obtient ainsi les expressions des flux visqueux $\vec{F}_{V_{i,j,k}}$ pour chaque cellule et on calcule les valeurs aux interfaces dans chaque direction par une simple demi-somme. Par exemple, pour l'interface avale dans la direction I on a :

$$\vec{F}_{V_{i+\frac{1}{2},j,k}} = \frac{1}{2} \left(\vec{F}_{V_{i,j,k}} + \vec{F}_{V_{i+1,j,k}} \right)$$

1.2.2 Discrétisation temporelle

Factorisation ADI

L'intégration temporelle est totalement indépendante de la discrétisation spatiale. Elle est basée sur les schémas à trois niveaux en temps et deux paramètres θ et ξ de Beam et Warming [18][21]. L'équation (1.29) peut être réécrite sous la forme compacte :

$$\frac{\partial \mathcal{Q}^*}{\partial t} = \mathcal{L}(\mathcal{Q}) \quad (1.39)$$

\mathcal{Q} et \mathcal{Q}^* désignent les vecteurs d'état du système semi-discret, constitués respectivement par l'ensemble des vecteurs locaux $\mathbf{q}_{i,j,k}$ et $\mathcal{V}_{i,j,k} \mathbf{q}_{i,j,k}$. \mathcal{L} est un opérateur vectoriel non-linéaire de \mathcal{Q} . En notant Δt le pas de temps de la discrétisation et \mathcal{Q}^N la valeur de \mathcal{Q} à l'instant $N\Delta t$, l'approximation de la dérivée temporelle du vecteur inconnu \mathcal{Q}^* est déduite d'un simple développement limité en Δt :

$$\frac{\mathcal{Q}^{*N+1} - \mathcal{Q}^{*N}}{\Delta t} = \frac{\theta}{1+\xi} \left(\frac{\partial \mathcal{Q}^*}{\partial t} \right)^{N+1} + \frac{1-\theta}{1+\xi} \left(\frac{\partial \mathcal{Q}^*}{\partial t} \right)^N + \frac{\xi}{1+\xi} \left(\frac{\mathcal{Q}^{*N} - \mathcal{Q}^{*N-1}}{\Delta t} \right) \quad (1.40)$$

Le schéma est explicite si $\theta = 0$ et implicite si $\theta > 0$. Le schéma le plus utilisé est le schéma Euler implicite, pour lequel $\theta = 1$ et $\xi = 0$.

En remplaçant \mathcal{Q}^* et l'opérateur \mathcal{L} donnés par la discrétisation spatiale (1.29), on montre que le schéma (1.40) peut s'écrire sous la forme d'une partie explicite $\mathcal{R}_{i,j,k}^N$ et d'une partie implicite et que l'on peut décomposer en une somme d'opérateurs \mathcal{H}_α suivant les trois directions de l'espace :

$$\left(\mathcal{I} + \frac{\theta \Delta t}{(1+\xi)} \sum_{\alpha=i,j,k} \mathcal{H}_\alpha \right) \frac{\delta \mathcal{Q}^N}{\Delta t} = \mathcal{R}_{i,j,k}^N$$

L'opérateur \mathcal{H}_α est donné par :

$$\mathcal{H}_\alpha = \left[\left(\frac{\partial \left(\mathcal{F}_{E+V, \alpha+\frac{1}{2}}^* \right)}{\partial \mathcal{Q}} - \frac{\partial \left(\mathcal{F}_{E+V, \alpha-\frac{1}{2}}^* \right)}{\partial \mathcal{Q}} \right) - \frac{1}{3} \mathcal{V}_{i,j,k} \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}} \right]$$

On approche alors l'opérateur \mathcal{H}_α par un produit de trois opérateurs plus simples pour obtenir la factorisation ADI :

$$\left(\mathcal{I} + \frac{\theta \Delta t}{(1 + \xi)} \sum_{\alpha=i,j,k} \mathcal{H}_\alpha \right) = \prod_{\alpha=i,j,k} \left(\mathcal{I} + \frac{\theta \Delta t}{(1 + \xi)} \mathcal{H}_\alpha \right) + \mathcal{O}(\Delta t^2)$$

L'avantage de cette factorisation est que chaque opérateur est associé à une direction du maillage, ce qui nous ramène à la résolution successive de systèmes monodimensionnels curvilignes. Les systèmes monodimensionnels sont tridiagonaux par blocs et chaque bloc est de dimension $n_{eq} \times n_{eq}$ où n_{eq} correspond au nombre d'équations traitées.

Choix du pas de temps

La valeur du pas de temps est contrôlée par les temps caractéristiques des différents phénomènes physiques (diffusions visqueuse, turbulente, acoustique) à l'échelle de la cellule. Dans MSD, il existe des pas de temps locaux qui permettent d'accélérer la convergence vers l'état stationnaire mais pour lequel on perd évidemment la consistance en temps. Le premier pas de temps local, proposé par J.R Julien [40] est une pondération des temps caractéristiques physiques :

$$\begin{aligned} \Delta t_{i,j,k} \left(C^{ac} \mathcal{F}_{i,j,k}^{ac} + C^{vis} \mathcal{F}_{i,j,k}^{vis} + C^{turb} \mathcal{F}_{i,j,k}^{turb} \right) &= PCFL \\ \mathcal{F}_{i,j,k}^{ac} &= (\|\mathbf{u}_{i,j,k}\| + c_{i,j,k}) \left(\frac{1}{l_{i,j,k}^I} + \frac{1}{l_{i,j,k}^J} + \frac{1}{l_{i,j,k}^K} \right) \\ \mathcal{F}_{i,j,k}^{vis} &= \nu_{tot,i,j,k} \left(\frac{1}{l_{i,j,k}^I{}^2} + \frac{1}{l_{i,j,k}^J{}^2} + \frac{1}{l_{i,j,k}^K{}^2} \right) \\ \mathcal{F}_{i,j,k}^{turb} &= c_\epsilon \frac{\sqrt{k_{i,j,k}}}{\mathcal{L}_{i,j,k}} \end{aligned}$$

$l_{i,j,k}^\alpha$ désigne la longueur de la cellule (i, j, k) dans la direction α du maillage. $\mathcal{F}_{i,j,k}^{ac}$, $\mathcal{F}_{i,j,k}^{vis}$, $\mathcal{F}_{i,j,k}^{turb}$ sont homogènes à des fréquences et liées respectivement aux phénomènes acoustiques, visqueux et turbulents. Les coefficients C^{ac} , C^{vis} et C^{turb} sont fixés par l'utilisateur et permettent de privilégier un phénomène plutôt qu'un autre. $PCFL$ est aussi fixé au début du calcul et permet de régler l'avancée en temps.

On peut également parler d'un pas de temps purement géométrique et indépendant des temps caractéristiques. Il est donné par les relations ci-dessous.

$$\Delta t_{i,j,k} = \frac{\sum_{i,j,k} 1 + \sqrt{\frac{\mathcal{V}_m}{\mathcal{V}_{i,j,k}}}}{\mathcal{N}_{\text{cel}} \left(1 + \sqrt{\frac{\mathcal{V}_m}{\mathcal{V}_{i,j,k}}} \right)} \Delta t_0 \quad \mathcal{V}_m = \frac{\sum_{i,j,k} \mathcal{V}_{i,j,k}}{\mathcal{N}_{\text{cel}}}$$

\mathcal{N}_{cel} est le nombre total de cellules. Δt_0 est le pas de temps moyen, choisi suivant les critères acoustiques du pas de temps global.

Lois de paroi

En ce qui concerne les conditions aux limites dans MSD, nous nous contenterons de parler des limites de type paroi car elles vont jouer un rôle central dans le couplage surfacique avec la structure. Pour les autres types de conditions aux limites (entrée, sortie, pression d'arrêt) voir [47].

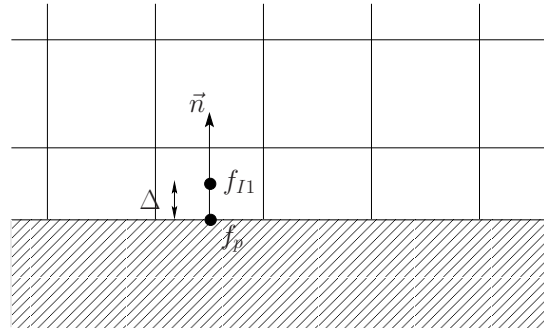


FIG. 1.5 – Grandeurs pariétales

Dans MSD, les lois de paroi ont toutes la même forme :

$$\varphi_p = \lambda_f \frac{\partial f}{\partial y} = (1 + \delta_f) \frac{f_p - f_{I1}}{\Delta}$$

où φ_p est le flux pariétal associé à la grandeur f , λ_f le coefficient de diffusion de f et δ_f le coefficient de la loi de paroi (FIG. 1.5).

Le coefficient δ_f est fonction du Reynolds de la maille en proche paroi. Les formules suivantes ont été proposées par Dutoya [16] et obtenues à partir de profils de couche limite :

$$\vec{\tau}_p = -\frac{\mu_p \mathbf{u}_{tI1}}{\Delta} (1 + \delta(Re_\Delta))$$

$$\mathbf{q}_p = \frac{\mu_p c_p}{Pr} \left(T_p - \left(T_{I1} + r \frac{\gamma - 1}{2} M_{I1}^2 \right) \right) (1 + \beta(Re_\Delta, Pr, Pr_t))$$

où :

$$\begin{aligned}\vec{u}_t &= \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{n}) \vec{n} \\ Re_\Delta &= \frac{\|\vec{u}_t\| \Delta}{\nu_p} \\ r &= \frac{\sqrt{Pr} + Re_t Pr_t}{1 + Re_t}\end{aligned}$$

Les coefficients de loi de paroi sont donnés par :

$$\begin{aligned}\delta &= \left(\frac{Re_\Delta}{462}\right)^{0,825} \frac{\left(\frac{Re_\Delta}{120}\right)^2}{1 + \frac{Re_\Delta}{80} + \left(\frac{Re_\Delta}{120}\right)^2} \\ \beta &= \delta \frac{\frac{Pr}{Pr_t}}{1 + \mathcal{H} \sqrt{\frac{2\delta}{Re_\Delta + 300}}} \\ \mathcal{H} &= 9,24 \left(\frac{Pr}{Pr_t}^{\frac{3}{4}} - 1\right) \left(1 + 0,28e^{-0,007 \frac{Pr}{Pr_t}}\right)\end{aligned}$$

Ces expressions ont l'inconvénient de sous-estimer les échanges dans les écoulements décollés à cause d'un taux de turbulence élevé alors que le Reynolds de la maille proche paroi devient faible. Il existe donc une autre forme du coefficient de loi de paroi dans le code en fonction du Reynolds turbulent $Re_t = \frac{\mu_t}{\mu}$:

$$\delta = e^{-\frac{Re_t}{20}} - 1 + \frac{Re_t}{3 + \ln(Re_t)}$$

Si l'écoulement étudié comporte à la fois des couches limites et des décollements, on prend en général le coefficient δ le plus élevé des deux.

Chapitre 2

Modélisation dans la structure

2.1 Modèle thermique

Le code utilisé pour décrire le milieu solide est ZeBuLoN[26]. C'est un code de mécanique des structures et de thermique développé conjointement par l'Ecole des Mines de Paris, l'ONERA et NW Numerics[2]. La discrétisation des équations est de type éléments finis par une approche de Galerkin.

2.1.1 Equation de la chaleur

On obtient l'équation de la chaleur en écrivant le premier principe de la thermodynamique sur un volume Ω indéformable de surface S .

$$\underbrace{\frac{dE}{dt}}_{\text{Variation d'énergie interne}} = \underbrace{\delta Q_{ext}}_{\text{Chaleur échangée avec l'extérieur}} + \underbrace{\delta Q_{int}}_{\text{Chaleur générée par les sources internes}}$$

Ce qui donne sous forme intégrale :

$$\int_{\Omega} \rho C_v \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega = - \int_S \vec{\phi} \cdot \vec{n} dS + \int_{\Omega} p(M, t) d\Omega \quad (2.1)$$

$\vec{\phi}$ est le flux conductif et vérifie la loi de Fourier $\vec{\phi} = -\lambda(T) \vec{\nabla} T$. p est un terme source volumique.

La forme locale de l'équation (2.1) s'écrit :

$$\rho C_v \frac{\partial T}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot (\lambda(T) \vec{\nabla} T) - p(M, t) = 0$$

Si l'on suppose que les caractéristiques du milieu sont constantes, on obtient la forme classique de l'équation de la chaleur :

$$\Delta T(M, t) - \frac{1}{a} \frac{\partial T(M, t)}{\partial t} + \frac{p(M, t)}{\lambda} = 0 \quad (2.2)$$

$a [m^2.s^{-1}]$ est la diffusivité du milieu et vaut $\frac{\lambda}{\rho C_v}$.

2.1.2 Formulation variationnelle

Forme générale

Pour résoudre un système différentiel modélisant un problème physique, il faut le mettre sous forme intégrale aussi appelée forme variationnelle ou encore forme faible[46]. Pour être suffisamment général, on adopte les notations suivantes :

- \mathbf{u} est le champ inconnu.
- Le système différentiel est symbolisé par l'opérateur \mathcal{D} défini sur un domaine Ω .
- Les conditions aux limites sur le bord $\partial\Omega$ sont regroupées dans l'opérateur \mathcal{C} .

Le système différentiel à résoudre est :

$$\begin{cases} \mathcal{D}(\mathbf{u}(M, t)) = 0 & \forall M \in \Omega \\ \mathcal{C}(\mathbf{u}(N, t)) = 0 & \forall N \in \partial\Omega \end{cases} \quad (2.3)$$

La détermination de la formulation variationnelle d'un système différentiel est une généralisation du principe des puissances virtuelles. On définit sur Ω un ensemble de fonctions $\psi(M)$ arbitraires appartenant à l'espace \mathcal{E}_ψ et on écrit le produit scalaire :

$$\int_{\Omega} \psi(M) \bullet \mathcal{D}(\mathbf{u}(M, t)) d\Omega = 0 \quad (2.4)$$

Cette relation étant valable $\forall \psi(M) \in \mathcal{E}_\psi$, on retrouve :

$$\mathcal{D}(\mathbf{u}(M, t)) = 0$$

L'avantage de la formulation (2.4) est de pouvoir effectuer des transformations d'intégrales et de faire ainsi diminuer le degré de dérivation de l'opérateur \mathcal{D} ¹.

¹En contrepartie, le degré de dérivation des fonctions ψ augmente.

Après ces transformations, la formulation variationnelle du système différentiel (2.3) s'écrit sous la forme :

$$\mathcal{A}(\psi(M), \mathbf{u}(M, t)) = \mathcal{B}(\psi(M)) \quad \forall \psi(M) \quad (2.5)$$

Forme faible de l'équation de la chaleur

Nous allons maintenant suivre la démarche précédente et écrire la forme variationnelle de l'équation de la chaleur (2.2). Dans ce cas, le système différentiel à résoudre est une équation aux dérivées partielles avec $\mathbf{u} \equiv T$:

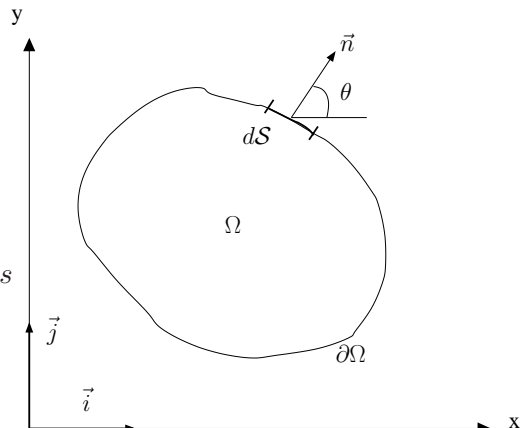
$$\mathcal{D}(\mathbf{T}) \equiv \left(\rho C_v \frac{\partial}{\partial t} - \lambda \Delta \right) T(M, t) - p(M, t)$$

On peut alors écrire le produit scalaire (2.4) sur le domaine Ω , en se limitant au cas à deux dimensions pour simplifier :

$$\int_{\Omega} \psi(M) \cdot \left[\left(\rho C_v \frac{\partial}{\partial t} - \lambda \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \right) T(M, t) - p(M, t) \right] d\Omega = 0 \quad \forall \psi(M) \quad (2.6)$$

L'idée est maintenant de transformer le Laplacien en faisant une intégration par parties et ainsi faire baisser le degré de dérivation de la température.

Rappel : Intégration par parties du second ordre en deux dimensions

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \omega \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dxdy &= - \int_{\Omega} \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} dxdy + \oint_{\partial \Omega} \omega \frac{\partial u}{\partial x} l ds \\ \int_{\Omega} \omega \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dxdy &= - \int_{\Omega} \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} dxdy + \oint_{\partial \Omega} \omega \frac{\partial u}{\partial y} m ds \\ l = \vec{n} \cdot \vec{i} &= \cos \theta \quad m = \vec{n} \cdot \vec{j} = \sin \theta \\ \frac{\partial}{\partial n} &= l \frac{\partial}{\partial x} + m \frac{\partial}{\partial y} \end{aligned}$$


Si l'on applique ces relations, l'équation (2.6) se met sous la forme variationnelle (2.5) :

$$\underbrace{\int_{\Omega} \left[\psi \rho C_v \frac{\partial T}{\partial t} + \lambda \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \psi p \right] d\Omega}_{\mathcal{A}(\psi, T)} = \underbrace{\int_{\Omega} \psi p d\Omega - \oint_{\partial \Omega} \psi \lambda \frac{\partial T}{\partial n} dS}_{\mathcal{B}(\psi)} \quad (2.7)$$

2.2 Discrétisation en éléments finis

Nous cherchons maintenant à discrétiser la forme faible (2.7) de l'équation de la chaleur. La méthode de discrétisation est caractérisée d'une part par le type d'approximation du champ de température T et d'autre part par le choix des fonctions de pondération ψ : on parle de méthode des résidus pondérés[27].

2.2.1 Approximation discrète de la température

Le but de la démarche est de construire un champ de température approché discret $T(\mathbf{x})$ du champ exact $T_{ex}(\mathbf{x})$, avec $\mathbf{x} = (x, y)$.

Approximation nodale

Dans le cas général, on peut écrire $T(\mathbf{x})$ comme une combinaison linéaire d'un ensemble de fonctions indépendantes $P_i(\mathbf{x})$ telle que :

$$T(\mathbf{x}) = P_1(\mathbf{x}) a_1 + P_2(\mathbf{x}) a_2 + \dots + P_m(\mathbf{x}) a_m$$

ou encore

$$T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} P_1(\mathbf{x}) & P_2(\mathbf{x}) & \dots & P_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{Bmatrix} \quad (2.8)$$

Les coefficients $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ sont les paramètres de l'approximation et les fonctions $\{P_i(\mathbf{x})\}_{i=1,m}$ sont les fonctions de base. On considère ici une approximation nodale, c'est-à-dire telle que T est confondue avec la température exacte T_{ex} aux points $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m$ aussi appelés nœuds :

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x}_1) &= T_{ex}(\mathbf{x}_1) = T_1 \\ T(\mathbf{x}_2) &= T_{ex}(\mathbf{x}_2) = T_2 \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \\ T(\mathbf{x}_m) &= T_{ex}(\mathbf{x}_m) = T_m \end{aligned}$$

Dans ces conditions, la fonction approchée $T(\mathbf{x})$ s'écrit :

$$T(\mathbf{x}) = N_1(\mathbf{x}) T_1 + N_2(\mathbf{x}) T_2 + \dots + N_m(\mathbf{x}) T_m \quad (2.9)$$

$$\text{soit} \quad T(\mathbf{x}) = \langle N_1(\mathbf{x}) \quad N_2(\mathbf{x}) \quad \dots \quad N_m(\mathbf{x}) \rangle \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_m \end{Bmatrix} = \langle N(\mathbf{x}) \rangle \{T\}$$

Les paramètres $\{T_1, T_2, \dots, T_m\}$ sont appelés variables nodales et les fonctions $\{N_i(\mathbf{x})\}_{i=1,m}$ sont les fonctions d'interpolation de l'approximation nodale. De ce fait, elles possèdent la propriété suivante :

$$N_j(\mathbf{x}_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

Approximation par éléments finis

La construction de la fonction approchée $T(\mathbf{x})$ telle qu'elle a été décrite précédemment est difficile lorsque le nombre de nœuds m devient important. Le problème se complique encore si le domaine discrétisé Ω a une forme complexe. Pour palier ces difficultés, on introduit une méthode d'approximation par sous-domaines qui consiste à :

- identifier un ensemble de sous-domaines Ω^e du domaine Ω .
- définir une fonction approchée $T^e(\mathbf{x})$ différente sur chaque sous-domaine Ω^e par la méthode d'approximation nodale.

La méthode des éléments finis est une forme particulière d'approximation nodale par sous-domaines. Elle est largement décrite par Zienkiewicz[61] et par Dhatt et Touzot[13]. Elle présente les particularités suivantes :

- L'approximation nodale sur chaque sous-domaine ne fait intervenir que les variables nodales rattachées aux nœuds appartenant à Ω^e et sa frontière.
- Les fonctions approchées $T^e(\mathbf{x})$ sur chaque sous-domaine sont construites de manière à être continues sur Ω^e et satisfont des conditions de continuité entre les différents sous-domaines.

La méthode des éléments finis présente deux aspects distincts : il faut dans un premier lieu définir analytiquement la géométrie de tous les éléments, ce qui est plus ou moins compliqué et dans un deuxième lieu construire les fonctions d'interpolation $N_i(\mathbf{x})$ sur chaque élément.

Définition des éléments

La caractérisation complète de la géométrie peut se révéler fastidieuse car on doit tenir compte des coordonnées particulières des nœuds de chaque élément. De plus, ces derniers peuvent avoir une forme très compliquée. Pour contourner cette difficulté, nous choisissons un élément de référence à partir duquel on détermine la géométrie de tous les autres.

Un élément de référence Ω^r est très simple et repéré dans un espace de référence. On lui fait subir une transformation τ^e pour en déduire n'importe quel élément réel Ω^e (FIG. 2.1).

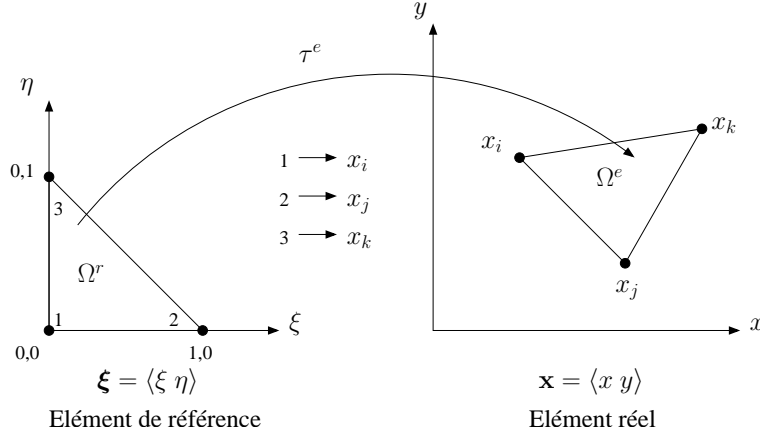


FIG. 2.1 – Transformation de l'élément de référence

La transformation τ^e dépend de la position et de la forme de l'élément réel. Pour chacun d'eux on a :

$$\tau^e : \boldsymbol{\xi} \rightarrow \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}) = [\overline{N}(\boldsymbol{\xi})] \{\mathbf{x}\}$$

$\overline{N}(\boldsymbol{\xi})$ sont les fonctions de transformation et sont identiques pour toutes les directions de l'espace. Si elles sont égales aux fonctions d'interpolation $N(\boldsymbol{\xi})$ dans l'espace de référence, alors les éléments sont isoparamétriques, c'est-à-dire que les nœuds géométriques sont confondus avec les nœuds d'interpolation. On se placera toujours dans ce cas. Finalement, l'approximation de T_{ex} dans l'espace de référence s'écrit :

$$T(\boldsymbol{\xi}) = T(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})) = \langle N(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})) \rangle \{T\} = \langle N(\mathbf{x}) \rangle \{T\} = T(\mathbf{x}) \quad (2.10)$$

Cependant, pour passer de $T(\boldsymbol{\xi})$ à $T(\mathbf{x})$, il nous faut déterminer $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})$ qui correspond à la transformation inverse $[\tau^e]^{-1}$. Celle-ci est souvent très compliquée à établir pour la grande majorité des éléments. En outre, la forme faible (2.7) de l'équation de la chaleur que l'on se propose de résoudre fait intervenir la température sous sa forme dérivée. Il nous suffit donc d'exprimer les dérivées de l'espace de référence en fonction de celles de l'espace réel. En d'autres termes, il faut calculer la matrice jacobienne $[J]$ telle que :

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{array} \right\} = \underbrace{\left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{array} \right]}_{[J]} \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{array} \right\} \quad (2.11)$$

Pour passer de l'espace de référence à l'espace réel, il faut calculer la matrice jacobienne inverse $[j] = [J]^{-1}$.

Détermination des fonctions d'interpolation $N(\xi)$

La construction des fonctions d'interpolation se fait à partir des polynômes de base $\langle P \rangle$ propres à chaque type d'élément. De façon générale, nous avons vu que T pouvait se décomposer comme dans l'équation (2.8). Dans l'espace de référence, on a la forme équivalente :

$$T(\xi) = \langle P_1(\xi) \quad P_2(\xi) \quad \dots \quad P_n(\xi) \rangle \left\{ \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{matrix} \right\} = \langle P(\xi) \{a\} \rangle \quad (2.12)$$

Sachant que l'on a $T_i = T_{ex}(\xi_i)$, on peut exprimer les valeurs nodales T_i en fonction des paramètres a_i :

$$\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle P_1(\xi_1) & P_2(\xi_1) & \dots & P_m(\xi_1) \rangle \\ \langle P_1(\xi_2) & P_2(\xi_2) & \dots & P_m(\xi_2) \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle P_1(\xi_m) & P_2(\xi_m) & \dots & P_m(\xi_m) \rangle \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{Bmatrix}$$

ou encore, sous forme condensée : $\{T\} = [P]\{a\}$.

En remplaçant cette forme condensée dans (2.12), on obtient :

$$T(\xi) = \langle P(\xi) \rangle [P]^{-1} \{T\}$$

On en déduit que :

$$\langle N(\xi) \rangle = \langle P(\xi) \rangle [P]^{-1}$$

Les fonctions d'interpolation se construisent donc à partir des fonctions de base $\langle P(\xi) \rangle$ correspondant au type d'élément et de la matrice nodale $[P]$.

Transformation des intégrales

La discrétisation de la forme faible de l'équation de la chaleur en éléments finis nécessite le passage d'une intégrale sur l'élément de référence à l'intégrale sur l'élément réel. Cette transformation est possible en utilisant le jacobien $[J]$ par l'intermédiaire de son déterminant.

Intégrale volumique :

$$\int_{\Omega^e} f(\mathbf{x}) dx dy dz = \int_{\Omega^r} f(\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi})) \det(J) d\xi d\eta d\zeta \quad (2.13)$$

Intégrale surfacique :

L'intégrale de surface s'écrit en fonction des coordonnées s_1 et s_2 qui sont en général (ξ, η) , (ξ, ζ) ou (η, ζ) . Dans l'espace de référence, elle est de la forme :

$$\int_S \dots J_s dS$$

avec :

$$J_s = \sqrt{(y_{s_1} z_{s_2} - z_{s_1} y_{s_2})^2 + (z_{s_1} x_{s_2} - x_{s_1} z_{s_2})^2 + (x_{s_1} y_{s_2} - y_{s_1} x_{s_2})^2}$$

$$x_{s_1} = \frac{\partial x}{\partial s_1} \quad (2.14)$$

Nous sommes maintenant en mesure de définir une approximation discrète de la température sur l'espace de référence $\boldsymbol{\xi} = (\xi, \eta, \zeta)$ en fonction des valeurs nodales T_i . Nous sommes de plus capables de discrétiser la forme faible de l'équation de la chaleur sur cet espace et de passer dans l'espace réel au moyen du jacobien $[J]$.

Cependant, pour définir complètement le système discrétisé, il nous faut maintenant choisir les fonctions de pondération ψ de la formulation variationnelle.

2.2.2 Méthode de Galerkin

La méthode de Galerkin est caractérisée par la forme particulière des fonctions de pondération ψ .

Elles sont en effet constituées par l'ensemble des variations δT de la fonction T :

$$\psi = \delta T = \langle P \rangle \{ \delta a \} = \langle N \rangle \{ \delta T \} \quad (2.15)$$

A partir de ces fonctions de pondération, nous pouvons maintenant discrétiser la forme intégrale (2.7) de l'équation de la chaleur. Notons cette intégrale \mathcal{W} . Elle s'écrit, dans l'espace réel :

$$\mathcal{W} = \int_{\Omega} \left[\psi \rho C_v \frac{\partial T}{\partial t} + \lambda \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right] d\Omega - \int_{\Omega} \psi p d\Omega + \oint_{\partial\Omega^e} \psi \lambda \frac{\partial T}{\partial n} dS \quad (2.16)$$

L'approximation de la température dans chaque élément de volume Ω^e ne faisant intervenir que les nœuds de cet élément, on peut décomposer l'intégrale \mathcal{W} sur Ω en une somme d'intégrales sur Ω^e :

$$\begin{aligned}\mathcal{W} &= \sum_{e=1}^{n_{el}} \mathcal{W}^e \\ &= \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \left[\psi^e \rho C_v \frac{\partial T}{\partial t} + \lambda \left(\frac{\partial \psi^e}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial \psi^e}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \psi^e p \right] d\Omega^e \\ &\quad + \oint_{\partial\Omega^e} \psi^e \lambda \frac{\partial T}{\partial n} dS^e\end{aligned}$$

Pour calculer la forme intégrale élémentaire \mathcal{W}^e on utilise les approximations par éléments finis de T et de $\psi = \delta T$ sur chaque élément Ω^e . Pour la partie temporelle, on introduit la variable $\dot{T} = \frac{\partial T}{\partial t}$.

$$\begin{cases} T = \langle N(x, y) \rangle \{T\} \\ \delta T = \langle N(x, y) \rangle \{\delta T\} \\ \dot{T} = \frac{\partial T}{\partial t} = \langle N(x, y) \rangle \{\dot{T}\} \end{cases}$$

$\{T\}$ est ici le vecteur colonne qui contient les valeurs nodales de la température pour l'élément e (sa dimension est donc égale au nombre de nœuds physiques contenus dans cet élément). Il en est de même pour les vecteurs $\{\delta T\}$ et $\{\dot{T}\}$.

Les dérivées s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial x} = \left\langle \frac{\partial N}{\partial x} \right\rangle \{T\} \\ \frac{\partial (\delta T)}{\partial x} = \delta \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) = \left\langle \frac{\partial N}{\partial x} \right\rangle \{\delta T\} \end{cases} \quad (2.17)$$

De plus le terme qui intervient dans l'intégrale de surface correspond au flux de chaleur sur $\partial\Omega^e$. On le note $\varphi = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n}$.

On obtient alors le résidu élémentaire suivant :

$$\begin{aligned}\mathcal{W}^e &= \int_{\Omega^e} \left[\delta T \rho C_v \dot{T} + \lambda \delta \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda \delta \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) \frac{\partial T}{\partial y} - \delta T p \right] - \oint_{\partial\Omega^e} \delta T \varphi dS^e \\ &= \int_{\Omega^e} \left[\delta T \rho C_v \dot{T} + \lambda \left\langle \delta \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) \delta \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) \right\rangle \left\{ \begin{matrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \end{matrix} \right\} - \delta T p \right] - \oint_{\partial\Omega^e} \delta T \varphi dS^e\end{aligned}$$

Si l'on pose :

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \left\langle \frac{\partial N}{\partial x} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial N}{\partial y} \right\rangle \end{bmatrix} \{T\} = [B]\{T\} \\ \begin{Bmatrix} \delta\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) \\ \delta\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right) \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \left\langle \frac{\partial N}{\partial x} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial N}{\partial y} \right\rangle \end{bmatrix} \{\delta T\} = [B]\{\delta T\} \end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^e &= \langle \delta T \rangle \left(\int_{\Omega^e} \left[\rho C_v \{N\} \langle N \rangle \{\dot{T}\} + \lambda [B]^t [B] \{T\} \right] d\Omega^e - \int_{\Omega^e} \{N\} p d\Omega^e \right. \\ &\quad \left. - \oint_{\partial\Omega^e} \{N\} \varphi d\mathcal{S}^e \right) \\ &= \langle \delta T \rangle \left(\underbrace{\left(\int_{\Omega^e} \rho C_v \{N\} \langle N \rangle d\Omega^e \right)}_{[c]} \{\dot{T}\} + \underbrace{\left(\int_{\Omega^e} \lambda [B]^t [B] d\Omega^e \right)}_{[k]} \{T\} \right. \\ &\quad \left. - \underbrace{\left(\int_{\Omega^e} \{N\} p d\Omega^e - \oint_{\partial\Omega^e} \{N\} \varphi d\mathcal{S}^e \right)}_{\{f\}} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.18)$$

On obtient finalement le système linéaire élémentaire :

$$[c]\{\dot{T}\} + [k]\{T\} = \{f\} \quad (2.19)$$

$[c]$ est la matrice élémentaire « capacité calorifique ».

$[k]$ est la matrice élémentaire « conductivité thermique ».

$\{f\}$ est le vecteur des sollicitations élémentaires.

$\{T\}$ est le vecteur solution recherché sur l'élément e .

$\{\dot{T}\} = \frac{\partial}{\partial t} \{T\}$.

Le principal intérêt de la méthode des éléments finis est de permettre la résolution indépendante chaque sous-système élémentaire (2.19). Pour construire le système linéaire global, il suffit d'assembler les systèmes élémentaires.

$$\mathcal{W} = \sum_{e=1}^{n_{el}} \mathcal{W}^e = \sum_{e=1}^{n_{el}} \langle \delta T \rangle \left([c]^e \{\dot{T}\} + [k]^e \{T\} - \{f\}^e \right) \quad (2.20)$$

Au final, le système linéaire global à résoudre sur le domaine Ω est :

$$[C]\{\dot{T}\} + [K]\{T\} = \{F\} \quad (2.21)$$

Dans la relation (2.21), $\{T\}$ est le vecteur colonne des valeurs nodales de la température pour l'ensemble du système et non plus pour un seul élément (sa dimension est égale au nombre total de nœuds physiques).

Remarque :

Nous avons ici exprimé le résidu élémentaire \mathcal{W} dans l'espace réel. En réalité, il faut d'abord l'écrire dans l'espace de référence. Il suffit alors de modifier les dérivées et les intégrales. On part de l'approximation nodale sur l'élément de référence r :

$$T(\xi) = \langle N(\xi) \rangle \{T\}$$

Transformation des dérivées :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial \xi} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \left\langle \frac{\partial N(\xi)}{\partial \xi} \right\rangle \{T\}$$

On en déduit la nouvelle forme de la matrice $[B]$:

$$[B] = \begin{bmatrix} \left\langle \frac{\partial N}{\partial x} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial N}{\partial y} \right\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left\langle \frac{\partial N}{\partial \xi} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial N}{\partial \eta} \right\rangle \end{bmatrix} = [J]^{-1} [B_\xi] = [j] [B_\xi]$$

En tenant compte de ces transformations et de celles des intégrales vues précédemment, les différents termes du système linéaire élémentaire dans l'espace de référence s'écrivent :

$$[k] = \int_{\Omega^r} \lambda [B_\xi]^t [J^{-1}]^t [B] \det(J) d\xi d\eta$$

$$[c] = \int_{\Omega^r} \rho C_v \{N(\xi, \eta)\} \langle N(\xi, \eta) \rangle \det(J) d\xi d\eta$$

$$\{f\} = \int_{\Omega^r} \{N(\xi, \eta)\} p \det(J) d\xi d\eta - \oint_{\partial\Omega^r} \{N(\xi, \eta)\} \varphi J_s ds$$

2.3 Discrétisation temporelle

La résolution d'un système non stationnaire de la forme (2.21) par la méthode des éléments finis est décrite par Bathe et Wilson[3] et par Crandall[12]. On considère une intégration en temps de type d'Euler implicite :

$$T_{t+\Delta t} = T_t + \left((1 - \theta) \dot{T}_t + \theta \dot{T}_{t+\Delta t} \right) \Delta t \quad (2.22)$$

Dans le cas de la résolution de l'équation de la chaleur, ce schéma est inconditionnellement stable pour $\theta = \frac{1}{2}$. La valeur par défaut est $\theta = 1$. Dans ce cas précis on a tout simplement :

$$\{\dot{T}_{t+\Delta t}\} = \frac{1}{\Delta t} (\{T_{t+\Delta t}\} - \{T_t\}) \quad (2.23)$$

On peut noter que l'approximation temporelle (2.22) est un cas particulier ($\xi = 0$) de celle employée dans le fluide. Si l'on remplace (2.23) dans le système linéaire (2.21) on aboutit à :

$$\{T_{t+\Delta t}\} = \{T_t\} + \Delta t [C]^{-1} (\{F_{t+\Delta t}\} - [K]\{T_{t+\Delta t}\}),$$

ce qui donne

$$[\overline{K}]\{T_{t+\Delta t}\} = \{T_t\}\{\overline{R}_{t+\Delta t}\} \quad (2.24)$$

$$\begin{cases} [\overline{K}] = [C] + \Delta t [K] \\ \{\overline{R}_{t+\Delta t}\} = \Delta t \{F_{t+\Delta t}\} + [C]\{T_t\} \end{cases}$$

En posant $\{\Delta T\} = \{T_{t+\Delta t}\} - \{T_t\}$, on a finalement :

$$[\overline{K}]\{\Delta T\} = \{R_{t+\Delta t}\}, \quad (2.25)$$

$$\begin{cases} \{R_{t+\Delta t}\} = \Delta t (\{F_{t+\Delta t}\} - [K]\{T_t\}) \\ \{T_{t+\Delta t}\} = \{T_t\} + \{\Delta T\} \end{cases}$$

Deuxième partie

**Couplage thermique fluide-structure
stationnaire**

Dans la première partie, nous avons exposé la modélisation des équations de Navier-Stokes dans le fluide par une approche volumes finis et celle de l'équation de la chaleur dans le solide par une approche éléments finis. Nous allons maintenant nous intéresser au couplage proprement dit des systèmes fluide et solide. Comme nous l'avons annoncé dans l'introduction, le but est de mettre en place un couplage externe entre le code fluide et le code structure. En d'autres termes, la stratégie est de résoudre de façon indépendante les problèmes fluide et solide et ainsi conserver la spécificité des méthodes de résolution déjà existantes. Le couplage fluide-structure se fera donc sur l'interface au moyen de conditions dites de raccord, par analogie avec les méthodes de décomposition de domaine. La communication informatique entre les codes MSD et ZeBuLoN sera prise en charge par la bibliothèque MpCCI (Mesh Parallel Code Coupling Interface) dont le rôle principal est le traitement et l'échange de données.

Après avoir présenté le système couplé à résoudre, nous aborderons le couplage par une approche purement linéaire grâce aux méthodes de décomposition de domaine. Ceci va nous permettre de dégager un certain nombre de résultats sur la convergence des méthodes de couplage. Dans le deuxième chapitre, nous nous intéresserons plus particulièrement à la stabilité des différentes stratégies de couplage grâce à l'analyse spectrale d'un modèle monodimensionnel discrétisé en différences finies. Le troisième chapitre, qui aborde un aspect plus informatique, décrit la dynamique des échanges via MpCCI.

Chapitre 1

Introduction

1.1 Problème aérothermique couplé en régime permanent

Notre objectif est d'étudier les interactions thermiques entre un domaine fluide et un domaine solide en régime permanent, ce qui implique de coupler les équations de Navier-Stokes compressibles à l'équation de Poisson pour la conduction dans le solide. La résolution de chacun des systèmes fluide et solide est exposée dans les chapitres précédents. On peut cependant rappeler les équations¹ :

Côté fluide

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} (\rho \vec{u}) = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial (\rho \vec{u})}{\partial t} + \vec{\nabla} (\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) = -\vec{\nabla} p + \vec{\nabla} (\vec{\tau}_v) + \rho \vec{f} \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial (\rho E)}{\partial t} + \vec{\nabla} (\rho \vec{u} E) = -\vec{\nabla} (p \vec{u}) + \vec{\nabla} (\vec{\tau}_v \cdot \vec{u}) + \rho \vec{f} \cdot \vec{u} - \vec{\nabla} (\vec{q}) \quad (1.3)$$

avec :

$$\begin{aligned} p &= \rho r T & \vec{\tau}_v &= \mu(T) \left(\vec{\nabla} u + \vec{\nabla} u^T - \frac{2}{3} \vec{\nabla} (\vec{u}) \cdot \vec{1} \right) \\ E &= e(T) + \frac{\|\vec{u}\|^2}{2} & \vec{q} &= k_f(T) \vec{\nabla} T \end{aligned} \quad (1.4)$$

Pour faire apparaître la température, on introduit la relation des gaz parfaits $de = C_v dT$ dans l'équation bilan de l'énergie interne suivante :

$$\frac{\partial (\rho e)}{\partial t} + \vec{\nabla} (\rho \vec{u} e) = -p \vec{\nabla} (\vec{u}) + \vec{\tau}_v : \vec{\nabla} (\vec{u}) - \vec{\nabla} (\vec{q}),$$

¹Les indices f et s sont correspondent respectivement aux milieux fluide et solide.

pour obtenir l'équation de convection-diffusion :

$$\frac{\partial (\rho C_v^f T_f)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho C_v^f T_f \vec{u}) = -\vec{\nabla} \cdot (k_f(T_f) \vec{\nabla} T_f) - T_f \left(\frac{\partial p}{\partial T_f} \right)_\rho \vec{\nabla} \vec{u} + \vec{\tau}_v : \vec{\nabla} \vec{u} + \rho T_f \frac{dC_v^f}{dt} \quad (1.5)$$

Côté solide

$$-\vec{\nabla} \cdot (k_s(T_s) \vec{\nabla} T_s) = \mathcal{F}(M, t) \quad (1.6)$$

$\mathcal{F}(M, t)$ est un terme source volumique. $\{\rho_i, C_v^i, k_i\}_{(i=f,s)}$ sont respectivement les masses volumiques, chaleurs spécifiques à volume constant et conductivités thermiques du fluide et de la structure.

Les codes Navier-Stokes sont le plus souvent basés sur des méthodes de type *time marching*, c'est-à-dire qui reposent sur la notion de pas de temps, physique ou non. Dans le cadre du couplage en régime permanent, la résolution des équations de Navier-Stokes se fait en utilisant un pas de temps local non physique (§ I.1.2.2) permettant d'accélérer la convergence.

Pour schématiser, on considère deux domaines fluide et solide Ω_f et Ω_s qui communiquent à travers une interface Γ . On appelle $\partial\Omega_s$ et $\partial\Omega_f$ les surfaces non couplées sur lesquelles on applique des conditions aux limites externes (FIG. 1.1).

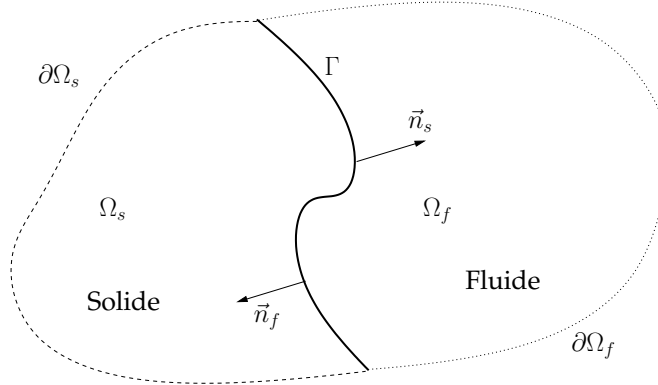


FIG. 1.1 – *Système couplé*

Pour que le couplage ait un sens, on doit évidemment vérifier l'égalité des flux et des températures sur l'interface Γ :

$$\begin{cases} T_p^{(s)} = T_p^{(f)} & \text{sur } \Gamma \\ -k_s \frac{\partial T_p^{(s)}}{\partial n_s} = k_f \frac{\partial T_p^{(f)}}{\partial n_f} & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (1.7)$$

$T_p^{(s)}$ et $T_p^{(f)}$ sont respectivement les températures pariétales côté solide et côté fluide.

1.2 Approche linéaire : méthodes de décomposition de domaine

Pour mieux comprendre la notion de couplage, nous allons nous placer dans un cas linéaire en considérant une interaction purement conductive entre le fluide et le solide en régime permanent (système (1.8)). Cette approche simple va nous permettre d'introduire différentes méthodes itératives de couplage associées à des conditions de raccord à l'interface. En outre, elle va nous donner des informations précieuses sur la convergence de ces méthodes.

$$\begin{cases} -k_f \Delta T_f = \mathcal{F}_f \\ -k_s \Delta T_s = \mathcal{F}_s \end{cases} \quad (1.8)$$

L'étude de ce système couplé est donc analogue à la discrétisation d'un problème linéaire sur les domaines Ω_s et Ω_f de la figure 1.1. On est confronté ici à un problème de décomposition de domaine[53] dans lequel un système linéaire global est divisé en deux sous-systèmes indépendants. Pour fixer les idées, soit $KT = \mathcal{F}$ le système linéaire associé au problème thermique global discrétisé sur $\Omega = \Omega_s \cup \Omega_f$. K est la matrice de conductivité du système global et dépend des paramètres physiques et géométriques du problème. T et \mathcal{F} sont les vecteurs correspondant à la discrétisation de la température, inconnue du problème, et des sollicitations thermiques. Ce système admet alors la décomposition suivante :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} K_{ii}^{(f)} & 0 & K_{ip}^{(f)} \\ 0 & K_{ii}^{(s)} & K_{ip}^{(s)} \\ K_{pi}^{(f)} & K_{pi}^{(s)} & K_{pp} \end{bmatrix}}_K \underbrace{\begin{bmatrix} T_i^{(f)} \\ T_i^{(s)} \\ T_p \end{bmatrix}}_T = \underbrace{\begin{bmatrix} b_i^{(f)} \\ b_i^{(s)} \\ b_p \end{bmatrix}}_{\mathcal{F}}$$

La matrice K est divisée en blocs. L'indice i correspond aux points situés à l'intérieur des volumes Ω_f et Ω_s alors que l'indice p correspond aux points situés sur la paroi couplée Γ . En d'autres termes, les vecteurs $T_i^{(f)}$, $T_i^{(s)}$ et T_p correspondent respectivement à la température du fluide pour les points appartenant à $\Omega_f \cup \partial\Omega_f$, à la température du solide pour les points appartenant à $\Omega_s \cup \partial\Omega_s$ et à la température des points de l'interface Γ .

Cette décomposition en blocs de la matrice K nous permet, en posant $K_{pp} = K_{pp}^{(f)} + K_{pp}^{(s)}$ et $b_p = b_p^{(f)} + b_p^{(s)}$, de ramener la résolution du système $KT = \mathcal{F}$ à celle de deux sous-systèmes de la forme :

$$\begin{bmatrix} K_{ii}^{(s)} & K_{ip}^{(s)} \\ K_{pi}^{(s)} & K_{pp}^{(s)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_i^{(s)} \\ T_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_i^{(s)} \\ b_p^{(s)} + q_p^{(s)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} K_{ii}^{(f)} & K_{ip}^{(f)} \\ K_{pi}^{(f)} & K_{pp}^{(f)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_i^{(f)} \\ T_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_i^{(f)} \\ b_p^{(f)} + q_p^{(f)} \end{bmatrix}$$

avec les conditions de continuité suivantes :

$$\begin{aligned} T_p^{(s)} &= T_p^{(f)} \\ q_p^{(s)} &= -q_p^{(f)} \end{aligned} \quad (1.9)$$

$q_p^{(s)}$ et $q_p^{(f)}$ correspondent aux composantes normales des flux chaleur pariétaux côté solide et côté fluide :

$$\begin{aligned} q_p^{(s)} &= \vec{q}_p^{(s)} \cdot \vec{n}_s = -k_s \frac{\partial T_p^{(s)}}{\partial n_s} \\ q_p^{(f)} &= \vec{q}_p^{(f)} \cdot \vec{n}_f = -k_f \frac{\partial T_p^{(f)}}{\partial n_f} \end{aligned}$$

Cette décomposition nous permet de découpler le problème et de résoudre les deux systèmes fluide et solide de façon indépendante.

1.2.1 Problème de Dirichlet-Neumann

Le moyen le plus simple de résoudre le système précédent est d'utiliser une méthode itérative dans laquelle on impose la température sur le premier domaine et le flux de chaleur sur le deuxième. Restons dans le cas général et considérons deux domaines de calcul 1 et 2 sans préciser quel est le fluide et quel est le solide. Le système à résoudre est dans ce cas :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} K_{ii}^{(1)} & K_{ip}^{(1)} \\ K_{pi}^{(1)} & K_{pp}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_i^{(1)} \\ T_p \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} b_i^{(1)} \\ b_p^{(1)} + q_p^{(1)} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} K_{ii}^{(2)} & K_{ip}^{(2)} \\ K_{pi}^{(2)} & K_{pp}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_i^{(2)} \\ T_p \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} b_i^{(2)} \\ b_p^{(2)} + q_p^{(2)} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{cases} T_p^{(1)} = T_p^{(2)} = T_p \\ q_p^{(1)} = -q_p^{(2)} = q_p \end{cases} \quad (1.10)$$

Problème de Dirichlet

Supposons que l'on impose la température de paroi T_p au domaine 1, on cherche le flux q_p qui vérifie :

$$\begin{bmatrix} K_{ii}^{(1)} & K_{ip}^{(1)} \\ K_{pi}^{(1)} & K_{pp}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_i^{(1)} \\ T_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_i^{(1)} \\ b_p^{(1)} + q_p \end{bmatrix}$$

Soit , en réarrangeant :

$$\underbrace{\left(K_{pp}^{(1)} - K_{pi}^{(1)} \left[K_{ii}^{(1)} \right]^{-1} K_{ip}^{(1)} \right)}_{S^{(1)}} T_p = \underbrace{\left(b_p^{(1)} - K_{pi}^{(1)} \left[K_{ii}^{(1)} \right]^{-1} K_{ip}^{(1)} b_i^{(1)} \right)}_{C^{(1)}} + q_p$$

$S^{(1)}$ est appelé matrice ou complément de Schur[60][11]. Il correspond à la condensation de la matrice de conductivité $K^{(1)}$ sur les points appartenant à l'interface de couplage Γ . Le complément de Schur nous permet d'éliminer les inconnues $T_i^{(1)}$ et de résoudre le problème réduit sur l'interface Γ . Le problème de Dirichlet consiste donc à trouver le flux de chaleur pariétal q_p vérifiant :

$$C^{(1)} + q_p = S^{(1)} T_p \quad (1.11)$$

Problème de Neumann

Pour résoudre le problème de Neumann, on impose cette fois le flux de chaleur sur le domaine 2 pour en déduire la température. On rappelle le système à résoudre, en tenant compte des conditions de continuité (1.10) :

$$\begin{bmatrix} K_{ii}^{(2)} & K_{ip}^{(2)} \\ K_{pi}^{(2)} & K_{pp}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_i^{(2)} \\ T_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_i^{(2)} \\ b_p^{(2)} - q_p \end{bmatrix}$$

On procède de la même façon que pour le problème de Dirichlet en condensant la matrice $K^{(2)}$ sur l'interface de couplage :

$$\underbrace{\left(K_{pp}^{(2)} - K_{pi}^{(2)} \left[K_{ii}^{(2)} \right]^{-1} K_{ip}^{(2)} \right)}_{S^{(2)}} T_p = \underbrace{\left(b_p^{(2)} - K_{pi}^{(2)} \left[K_{ii}^{(2)} \right]^{-1} K_{ip}^{(2)} b_i^{(2)} \right)}_{C^{(2)}} + q_p$$

On résout le problème de Neumann en cherchant la température de paroi qui vérifie :

$$T_p = \left[S^{(2)} \right]^{-1} \left(C^{(2)} + q_p \right) \quad (1.12)$$

Pour résumer, la méthode de Dirichlet-Neumann consiste à résoudre alternativement les équations (1.11) et (1.12) c'est-à-dire à calculer le flux pariétal sur le domaine 1 et la température pariétale sur le domaine 2 de façon itérative jusqu'à convergence. Si l'on repère les itérations par l'indice k , on a le système :

$$C^{(1)} + q_p^{k+1} = S^{(1)} T_p^k \quad (1.13)$$

$$T_p^{k+1} = \left[S^{(2)} \right]^{-1} \left(C^{(2)} + q_p^{k+1} \right) \quad (1.14)$$

En regroupant les deux équations, on obtient finalement la relation de récurrence suivante :

$$\begin{aligned} T_p^{k+1} &= - \left[S^{(2)} \right]^{-1} \left(S^{(1)} T_p^k - C \right) \\ C &= C^{(1)} + C^{(2)} \end{aligned} \quad (1.15)$$

On peut définir la condition de convergence de la relation (1.15) en désignant par \mathcal{T}_p la solution du problème couplé sur l'interface Γ et en écrivant :

$$T_p^{k+1} - \mathcal{T}_p = \left[S^{(2)} \right]^{-1} S^{(1)} \left(T_p^k - \mathcal{T}_p \right) \quad (1.16)$$

Ce qui donne le critère de convergence :

$$\left| \left[S^{(2)} \right]^{-1} S^{(1)} \right| < 1 \quad (1.17)$$

Cette méthode ne converge pas dans la plupart des cas. En effet, la résolution du problème de Neumann peut engendrer un mauvais conditionnement de la matrice $S^{(2)}$ et donc des valeurs propres faibles par rapport à celles de $S^{(1)}$ issue du problème de Dirichlet. On en déduit que la matrice $\left[S^{(2)} \right]^{-1}$ peut présenter des termes élevés et la relation (1.17) n'est plus vérifiée.

Pour stabiliser le problème de Dirichlet-Neumann, on utilise une méthode de relaxation en introduisant un coefficient β et en remplaçant T_p^{k+1} de la relation de récurrence (1.15) par $\beta T_p^{k+1} + (1 - \beta) T_p^k$ ce qui donne :

$$T_p^{k+1} = T_p^k - \beta \left[S^{(2)} \right]^{-1} \left(S T_p^k - C \right) \quad (1.18)$$

$$T_p^{k+1} - \mathcal{T}_p = \left(\mathcal{I} - \beta \left[S^{(2)} \right]^{-1} S \right) \left(T_p^k - \mathcal{T}_p \right) \quad (1.19)$$

$$S = S^{(1)} + S^{(2)}$$

avec le critère de convergence :

$$\left| \mathcal{I} - \beta \left[S^{(2)} \right]^{-1} S \right| < 1 \quad 0 < \beta < 1 \quad (1.20)$$

S est la matrice de Schur du problème global condensé sur l'interface Γ : $S \mathcal{T}_p = C$.

Dans ce cas le coefficient de relaxation β nous permet de contrecarrer les effets néfastes de l'opérateur $S^{(2)}$. Néanmoins, plus $S^{(2)}$ est petit, plus β doit être faible pour stabiliser le processus, ce qui a pour inconvénient majeur d'affecter la vitesse de convergence.

1.2.2 Problème de Dirichlet-Fourier

Une façon de stabiliser le processus itératif sans pour autant pénaliser la convergence est de remplacer la condition de Neumann sur l'interface de couplage par une condition de type Fourier. Dans cette configuration, on résout toujours le système suivant :

$$\begin{bmatrix} K_{ii}^{(1)} & K_{ip}^{(1)} \\ K_{pi}^{(1)} & K_{pp}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_i^{(1)} \\ T_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_i^{(1)} \\ b_p^{(1)} + q_p^{(1)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} K_{ii}^{(2)} & K_{ip}^{(2)} \\ K_{pi}^{(2)} & K_{pp}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_i^{(2)} \\ T_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_i^{(2)} \\ b_p^{(2)} + q_p^{(2)} \end{bmatrix}$$

mais avec les conditions de continuité :

$$\begin{cases} T_p^{(1)} = T_p^{(2)} \\ q_p^{(2)} + A^{(1)} T_p^{(2)} = -q_p^{(1)} + A^{(1)} T_p^{(1)} \end{cases}$$

$A^{(1)}$ est un opérateur défini sur Γ . Il est calculé dans le domaine 1 et utilisé dans le domaine 2 comme condition aux limites. En mécanique des fluides, il s'interprète localement comme un coefficient d'échange convectif.

Problème de Fourier

Si l'on considère la condition de continuité de Fourier (1.21), le système à résoudre dans le domaine 2 se présente sous la forme :

$$\begin{bmatrix} K_{ii}^{(2)} & K_{ip}^{(2)} \\ K_{pi}^{(2)} & K_{pp}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_i^{(2)} \\ T_p^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_i^{(2)} \\ b_p^{(2)} - q_p^{(1)} - A^{(1)} (T_p^{(2)} - T_p^{(1)}) \end{bmatrix}$$

La condensation de la matrice $K^{(2)}$ sur l'interface Γ donne :

$$\left(\underbrace{K_{pp}^{(2)} - K_{pi}^{(2)} [K_{ii}^{(2)}]^{-1} K_{ip}^{(2)}}_{S^{(2)}} + A^{(1)} \right) T_p^{(2)} = \underbrace{\left(b_p^{(2)} - K_{pi}^{(2)} [K_{ii}^{(2)}]^{-1} K_{ip}^{(2)} b_i^{(2)} \right)}_{C^{(2)}} - q_p^{(1)} + A^{(1)} T_p^{(1)} \quad (1.21)$$

Si l'on injecte la relation (1.11) issue du problème de Dirichlet du domaine 1 dans l'équation (1.21) on obtient la relation (1.22).

$$T_p^{(2)} = - \left(S^{(2)} + A^{(1)} \right)^{-1} \left[\left(S^{(1)} - A^{(1)} \right) T_p^{(1)} - C \right] \quad (1.22)$$

On en déduit la relation de récurrence correspondante :

$$T_p^{k+1} = - \left(S^{(2)} + A^{(1)} \right)^{-1} \left[\left(S^{(1)} - A^{(1)} \right) T_p^k - C \right] \quad (1.23)$$

Le critère de convergence est alors défini par la relation :

$$T_p^{k+1} - T_p = - \left(S^{(2)} + A^{(1)} \right)^{-1} \left(S^{(1)} - A^{(1)} \right) \left(T_p^k - T_p \right) \quad (1.24)$$

Soit :

$$\left| \left(S^{(2)} + A^{(1)} \right)^{-1} \left(S^{(1)} - A^{(1)} \right) \right| < 1 \quad (1.25)$$

Si l'on se place dans le cas problématique où $S^{(2)}$ est faible devant $S^{(1)}$, la relation (1.25) devient :

$$\left| \left(S^{(2)} + A^{(1)} \right)^{-1} \left(S^{(1)} - A^{(1)} \right) \right| \approx \left| \left[A^{(1)} \right]^{-1} \left(S^{(1)} - A^{(1)} \right) \right| < 1 \quad (1.26)$$

La convergence est donc conditionnée par l'opérateur $A^{(1)}$. Le choix de celui-ci est donc primordial si l'on veut s'assurer de la convergence du processus itératif. Dans le cadre de cette approche linéaire du couplage, la valeur optimale de cet opérateur est $A^{(1)} = S^{(1)}$ car elle annule le critère de convergence (1.25).

En outre, au regard cette relation (1.25) on est en droit de se demander s'il est préférable de résoudre le problème de Fourier côté solide et le problème de Dirichlet côté fluide ou l'inverse. Il est clair que, plus la norme de $S^{(2)}$ est élevée, plus la convergence est assurée. Or, on a vu au chapitre I.2 (relation (2.18)) que la matrice de conductivité K du problème de thermique stationnaire était directement proportionnelle à la conductivité thermique du matériau considéré. Il en est donc de même pour la matrice de Schur S correspondante qui est une condensation de K . En d'autres termes, plus la conductivité thermique du milieu 2 est élevée, plus la norme de $S^{(2)}$ est grande. On en déduit ainsi que le problème de Fourier doit être résolu sur le système qui a la plus grande conductivité thermique, c'est-à-dire la structure. Le milieu 1 est donc le fluide et le milieu 2 le solide.

Dans le cas où la conductivité du solide (milieu 2) est faible ($[S^{(2)}]^{-1}$ est grand), la convergence est plus difficile d'après la relation (1.25). L'idée est alors de compenser cette perte de stabilité en augmentant les valeurs de l'opérateur $A^{(1)}$ correspondant au domaine fluide, comme le montre la relation (1.26).

1.2.3 Problème de Fourier-Fourier

Nous allons généraliser la méthode de couplage en considérant des conditions de raccord mixtes dans chaque domaine.

Le problème de départ est toujours le même :

$$\begin{bmatrix} K_{ii}^{(1)} & K_{ip}^{(1)} \\ K_{pi}^{(1)} & K_{pp}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_i^{(1)} \\ T_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_i^{(1)} \\ b_p^{(1)} + \kappa_p^{(1)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} K_{ii}^{(2)} & K_{ip}^{(2)} \\ K_{pi}^{(2)} & K_{pp}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_i^{(2)} \\ T_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_i^{(2)} \\ b_p^{(2)} + \kappa_p^{(2)} \end{bmatrix}$$

avec les conditions de raccord :

$$\begin{cases} \underbrace{q_p^{(1)} + A^{(2)}T_p^{(1)}}_{\kappa_p^{(1)}} = -q_p^{(2)} + A^{(2)}T_p^{(2)} \\ \underbrace{q_p^{(2)} + A^{(1)}T_p^{(2)}}_{\kappa_p^{(2)}} = -q_p^{(1)} + A^{(1)}T_p^{(1)} \end{cases} \quad (1.27)$$

Les problèmes de Fourier condensés correspondants sont de la forme (voir (1.21)) :

$$\begin{aligned} (S^{(1)} + A^{(2)}) T_p^{(1)} &= C^{(1)} + \kappa_p^{(1)} = -q_p^{(2)} + A^{(2)}T_p^{(2)} \\ (S^{(2)} + A^{(1)}) T_p^{(2)} &= C^{(2)} + \kappa_p^{(2)} = -q_p^{(1)} + A^{(1)}T_p^{(1)} \end{aligned}$$

Or les flux pariétaux $q_p^{(1)}$ et $q_p^{(2)}$ sont solutions des deux systèmes linéaires suivants :

$$\begin{aligned} S^{(1)}T_p^{(1)} &= C^{(1)} + q_p^{(1)} \\ S^{(2)}T_p^{(2)} &= C^{(2)} + q_p^{(2)} \end{aligned}$$

On a donc, pour les problèmes condensés de Fourier :

$$\begin{aligned} (S^{(1)} + A^{(2)}) T_p^{(1)} &= C - (S^{(2)} - A^{(2)}) T_p^{(2)} \\ (S^{(2)} + A^{(1)}) T_p^{(2)} &= C - (S^{(1)} - A^{(1)}) T_p^{(1)} \end{aligned}$$

Dans le cadre d'un processus itératif, on déduit les deux relations de récurrence suivantes :

$$\left(S^{(1)} + A^{(2)}\right) T_p^{(1)k+1} = C - \left(S^{(2)} - A^{(2)}\right) T_p^{(2)k} \quad (1.28)$$

$$\left(S^{(2)} + A^{(1)}\right) T_p^{(2)k+1} = C - \left(S^{(1)} - A^{(1)}\right) T_p^{(1)k+1} \quad (1.29)$$

En substituant $T_p^{(1)k+1}$ et en regroupant les températures :

$$\begin{aligned} T_p^{(2)k+1} = & \underbrace{\left(S^{(2)} + A^{(1)}\right)^{-1} \left(S^{(1)} - A^{(1)}\right) \left(S^{(1)} + A^{(2)}\right)^{-1} \left(S^{(2)} - A^{(2)}\right)}_{\mathcal{H}} T_p^{(2)k} \\ & + C \left(S^{(2)} + A^{(1)}\right)^{-1} \left(\mathcal{I} - \left(S^{(1)} - A^{(1)}\right) \left(S^{(1)} + A^{(2)}\right)^{-1}\right) \end{aligned} \quad (1.30)$$

Le problème de Fourier-Fourier se résume donc à la relation de récurrence (1.30) dans le domaine 2. Ceci est dû au fait que l'on calcule d'abord la température $T_p^{(1)k+1}$ grâce à la relation (1.28) que l'on utilise directement dans la relation (1.29) pour trouver $T_p^{(2)k+1}$.

L'expression (1.30) fait apparaître l'opérateur \mathcal{H} qui est le produit de deux opérateurs identiques à ceux de la méthode de Dirichlet-Fourier de l'équation (1.22). En effet, il se décompose comme suit :

$$\mathcal{H} = \underbrace{\left(S^{(2)} + A^{(1)}\right)^{-1} \left(S^{(1)} - A^{(1)}\right)}_{\text{Dirichlet-Fourier}} \underbrace{\left(S^{(1)} + A^{(2)}\right)^{-1} \left(S^{(2)} - A^{(2)}\right)}_{\text{Fourier-Dirichlet}}$$

On en déduit qu'une itération de la méthode Fourier-Fourier équivaut à superposer une itération Dirichlet-Fourier (Dirichlet dans le domaine 1 et Fourier dans la domaine 2) et une itération Fourier-Dirichlet (Fourier dans le domaine 1 et Dirichlet dans le domaine 2).

Chapitre 2

Méthodes de couplage stationnaire

Le chapitre précédent nous a permis de dégager trois méthodes de couplage qui se distinguent par les conditions de raccord utilisées. Nous allons étudier ces trois méthodes dans le cadre du couplage fluide-structure proprement dit, c'est-à-dire entre les équations de Navier-Stokes et l'équation de la chaleur. Nous utilisons la même approche que celle des méthodes de décomposition de domaine en considérant une méthode itérative sur l'interface dans laquelle on impose des conditions aux limites thermiques sur chacun des domaines jusqu'à obtenir la convergence des flux et des températures. Les trois méthodes de couplage correspondent aux problèmes de Dirichlet-Neumann, Dirichlet-Fourier et Fourier-Fourier. Dans les méthodes de décomposition de domaine, nous avons déterminé complètement le système linéaire à l'interface par l'intermédiaire du complément de Schur global qui est la somme des compléments de Schur de chacun des milieux. Dans le cadre du couplage conduction-convection, notre but n'est pas d'écrire ce système linéaire mais de résoudre de façon indépendante les problèmes fluide et solide par l'intermédiaire de deux codes différents. Ainsi, nous conservons la spécificité et les méthodes de résolution de chaque code.

Après avoir rappelé les conditions de raccord adaptées au couplage en régime permanent, nous étudierons leur stabilité sur un modèle monodimensionnel simple, ce qui nous permettra de caractériser les paramètres liés au couplage. Nous déterminerons ensuite ces coefficients en effectuant une approximation locale au voisinage de l'interface.

2.1 Algorithme partitionné

2.1.1 Principe

La méthode partitionnée consiste à résoudre les problèmes fluide et solide séparément et de coupler uniquement à l'interface par l'intermédiaire de quantités physiques échangées entre les deux milieux. Tout se passe comme si le système était découplé, comme le montre la figure 2.1. On définit en effet deux interfaces Γ_f et Γ_s sur lesquelles on impose des conditions de raccord. La nature des quantités échangées détermine le type de condition de raccord utilisé. Nous avons vu au chapitre précédent qu'il existait en thermique trois types de condition possibles.

– Dirichlet

On impose l'égalité des températures à l'interface :

$$T_p^{(f)} = T_p^{(s)} \quad (2.1)$$

– Neumann

On impose l'égalité des flux de chaleur à l'interface :

$$q_p^{(f)} = -q_p^{(s)} \quad \text{avec } q = -k \frac{\partial T}{\partial n} \quad (2.2)$$

– Fourier

On impose une relation linéaire entre le flux et la température par l'intermédiaire d'un coefficient de couplage α , homogène à un coefficient d'échange :

$$q_p^{(f)} + \alpha T_p^{(f)} = -q_p^{(s)} + \alpha T_p^{(s)} \quad (2.3)$$

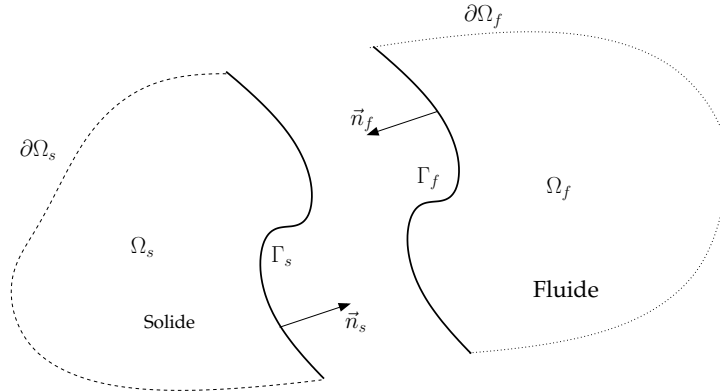
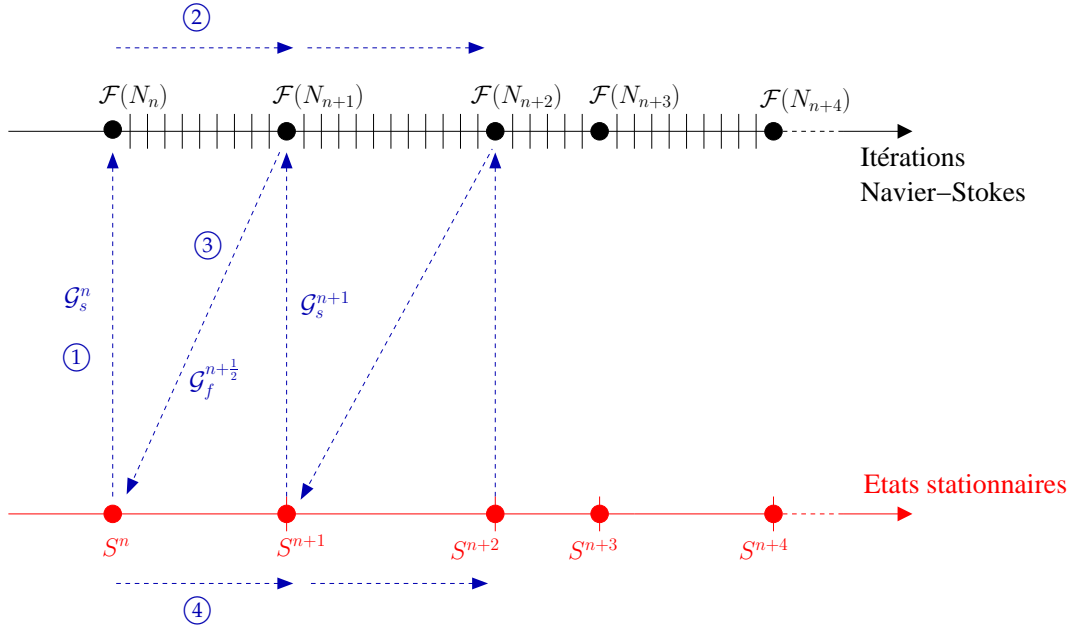


FIG. 2.1 – *Système découpé*

Les algorithmes de couplage de type partitionné ont été développés par Piperno[48][49][50] et Fahrat[24] notamment. Nous allons nous baser sur ces études pour définir la méthode de couplage de base. Le principe réside en un processus itératif au cours duquel on résout successivement les problèmes fluide et solide, le couplage étant assuré par des échanges de quantités physiques. En régime permanent, la convergence du processus itératif est atteinte quand le système est à l'équilibre sur l'interface, c'est-à-dire quand on vérifie l'égalité des flux et des températures. Les quantités échangées sont la température, le flux de chaleur et un coefficient de couplage, de façon à former une des trois conditions aux limites thermiques exposées plus haut.

L'algorithme de couplage est présenté sur la figure 2.2. On note \mathcal{G} l'ensemble des grandeurs physiques mises en jeu à l'interface, respectivement côté fluide et côté solide :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_f &\equiv (T_p^{(f)}, q_p^{(f)}, \alpha_f) \\ \mathcal{G}_s &\equiv (T_p^{(s)}, q_p^{(s)}, \alpha_s) \end{aligned}$$

FIG. 2.2 – *Algorithme de couplage stationnaire*

Dans l'algorithme de couplage représenté, on définit deux échelles de temps, une pour chaque milieu.

Echelle de temps fluide

L'approche numérique dans le fluide est de type *time marching* : la convergence vers un état stationnaire ne diffère du régime transitoire que par l'utilisation d'un pas de temps non-physique (local). En d'autres termes, l'évolution du fluide est pseudo-instationnaire et atteint l'état stationnaire au bout d'un certain nombre d'itérations Navier-Stokes. L'échelle de temps du fluide est constituée par un certain nombre de ces itérations. $\mathcal{F}(N_n)$ correspond à l'état du fluide à une itération de couplage donnée N_n . Il est primordial de noter que l'état $\mathcal{F}(N_n)$ ne correspond en aucun cas à l'état stationnaire du fluide mais à un état intermédiaire non convergé du processus itératif. En effet, l'intérêt de la méthode est de coupler ces états intermédiaires à la structure, c'est-à-dire avant que le fluide n'ait atteint son état stationnaire. De cette façon, on espère atteindre plus rapidement la convergence du système global vers son état stationnaire.

Echelle de temps solide

L'approche numérique dans le solide est toute autre. En effet, contrairement au fluide, la résolution de l'équation de la chaleur stationnaire est directe et ne dépend que de la condition à l'interface. L'échelle de temps côté solide se décompose donc en une succession d'états stationnaires ($S^n, S^{n+1}, S^{n+2} \dots$) obtenus en imposant les conditions aux limites issues du fluide.

Description de l'algorithme de couplage

L'objectif est de déterminer un état stationnaire couplé dans le fluide et le solide. Le principe est de partir de l'état du système connu au couplage n ($\mathcal{F}(N_n)$ pour le fluide et S^n pour le solide) et de déterminer les états $\mathcal{F}(N_{n+1})$ et S^{n+1} au couplage $n + 1$. L'algorithme est décomposé en quatre points représentés sur la figure 2.2 :

- ① **Envoi des quantités pariétales** \mathcal{G}_s^n au fluide.
- ② **Calcul Navier-Stokes pseudo-stationnaire** entre les itérations N_n et $N_{n+1} = N_n + \Delta N_n$ avec l'une des trois conditions de raccord suivantes :

$$\begin{aligned} T_p^{(f)n+\frac{1}{2}} &= T_p^{(s)n} \\ q_p^{(f)n+\frac{1}{2}} &= -q_p^{(s)n} \\ q_p^{(f)n+\frac{1}{2}} + \alpha_s^n T_p^{(f)n+\frac{1}{2}} &= -q_p^{(s)n} + \alpha_s^n T_p^{(s)n} \end{aligned}$$

On en déduit un nouveau champ aérothermique dans le fluide à l'étape $n + \frac{1}{2}$, dont les quantités pariétales $\mathcal{G}_f^{n+\frac{1}{2}}$.

- ③ **Envoi des quantités** $\mathcal{G}_f^{n+\frac{1}{2}}$ vers le solide.
- ④ **Calcul de conduction stationnaire** avec l'une des conditions :

$$\begin{aligned} T_p^{(s)n+1} &= T_p^{(f)n+\frac{1}{2}} \\ q_p^{(s)n+1} &= -q_p^{(f)n+\frac{1}{2}} \\ q_p^{(s)n+1} + \alpha_f^{n+\frac{1}{2}} T_p^{(s)n+1} &= -q_p^{(f)n+\frac{1}{2}} + \alpha_f^{n+\frac{1}{2}} T_p^{(f)n+\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

On en déduit les quantités pariétales \mathcal{G}_s^{n+1} .

On répète ce cycle de proche en proche jusqu'à obtenir l'égalité des flux et des températures sur l'interface :

$$\begin{aligned} T_p^{(s)} &= T_p^{(f)} \\ q_p^{(s)} &= -q_p^{(f)} \end{aligned}$$

α_f et α_s , homogènes à des coefficients d'échange physiques, représentent des paramètres de relaxation pour stabiliser le processus de couplage. Le choix optimal de ces paramètres, obtenus à l'aide d'une étude de stabilité linéaire, fait l'objet d'une description détaillée au paragraphe II.2.2.

Notons que cet algorithme est alterné. En d'autres termes, lorsqu'un calcul est mené dans un milieu, le code dans l'autre milieu est en attente. Cette méthode permet de réactualiser les

quantités \mathcal{G}_s^{n+1} directement à partir des quantités $\mathcal{G}_f^{n+\frac{1}{2}}$ issues du calcul Navier-Stokes entre n et $n + \frac{1}{2}$.

2.1.2 Conditions de raccord

Les différentes variantes de la méthode de couplage dépendent du type de condition de raccord utilisé dans chaque milieu. Par analogie avec les méthodes de décomposition de domaine présentées au chapitre 1, on distingue trois méthodes de couplage :

- La méthode de Dirichlet-Neumann : on impose la température côté fluide et le flux de chaleur côté solide.

$$\begin{cases} T_p^{(f)n+\frac{1}{2}} = T_p^{(s)n} & \text{sur } \Gamma_f \\ q_p^{(s)n+1} = -q_p^{(f)n+\frac{1}{2}} & \text{sur } \Gamma_s \end{cases} \quad (2.4)$$

- La méthode de Dirichlet-Fourier : on impose la température côté fluide et une relation linéaire flux-température côté solide.

$$\begin{cases} T_p^{(f)n+\frac{1}{2}} = T_p^{(s)n} & \text{sur } \Gamma_f \\ q_p^{(s)n+1} + \alpha_f^{n+\frac{1}{2}} T_p^{(s)n+1} = -q_p^{(f)n+\frac{1}{2}} + \alpha_f^{n+\frac{1}{2}} T_p^{(f)n+\frac{1}{2}} & \text{sur } \Gamma_s \end{cases} \quad (2.5)$$

Cette méthode de couplage a été utilisée par Sondak[57] dans le cadre d'une simulation thermique instationnaire dans un aubage.

- La méthode de Fourier-Fourier : on impose une relation linéaire flux-température des deux côtés.

$$\begin{cases} q_p^{(f)n+\frac{1}{2}} + \alpha_s^n T_p^{(f)n+\frac{1}{2}} = -q_p^{(s)n} + \alpha_s^n T_p^{(s)n} & \text{sur } \Gamma_f \\ q_p^{(s)n+1} + \alpha_f^{n+\frac{1}{2}} T_p^{(s)n+1} = -q_p^{(f)n+\frac{1}{2}} + \alpha_f^{n+\frac{1}{2}} T_p^{(f)n+\frac{1}{2}} & \text{sur } \Gamma_s \end{cases} \quad (2.6)$$

$$\begin{cases} q_p^{(f)n+\frac{1}{2}} + \alpha_s^n T_p^{(f)n+\frac{1}{2}} = -q_p^{(s)n} + \alpha_s^n T_p^{(s)n} & \text{sur } \Gamma_f \\ q_p^{(s)n+1} + \alpha_f^{n+\frac{1}{2}} T_p^{(s)n+1} = -q_p^{(f)n+\frac{1}{2}} + \alpha_f^{n+\frac{1}{2}} T_p^{(f)n+\frac{1}{2}} & \text{sur } \Gamma_s \end{cases} \quad (2.7)$$

Les paramètres α_s et α_f correspondent aux coefficients de couplage calculés respectivement dans le solide et le fluide. Nous verrons dans la suite qu'ils peuvent s'écrire comme une approximation locale des opérateurs $A^{(s)}$ et $A^{(f)}$ des méthodes de décomposition de domaine.

2.1.3 Critère de convergence

La convergence est atteinte quand on a égalité des flux et des températures sur l'interface. Dans la suite, nous utilisons les critères normalisés suivants :

$$\mathcal{R}_T = \frac{|T_p^{n+1} - T_p^n|_{max}}{\frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} T_p^{n+1}(i)} < \epsilon \quad \text{et} \quad \mathcal{R}_q = \frac{|q_p^{n+1} - q_p^n|_{max}}{\frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} |q_p^{n+1}(i)|} < \epsilon, \quad (2.8)$$

qui contrôle, dans chaque milieu, la variation de température et de flux entre deux couplages successifs n et $n+1$. \mathcal{N} correspond ici au nombre de degrés de liberté sur l'interface de couplage.

2.2 Etude de stabilité

On se propose d'étudier de façon plus précise les différentes méthodes de couplage. Dans le cas stationnaire, on a vu au chapitre II.1 que la méthode de Dirichlet-Neumann ne convergait pas dans la plupart des applications et que la version relaxée pouvait être trop pénalisante pour la convergence (§II.1.2.1). C'est pourquoi nous étudions seulement les méthodes de Dirichlet-Fourier et Fourier-Fourier et plus précisément leur stabilité. En d'autres termes, on désire étudier leur comportement en fonction des coefficients α_f et α_s . On considère pour cela un modèle monodimensionnel discrétisé en différences finies. Nous allons suivre une démarche analogue à celles de Giles[28] et de Montenay[47] qui est basée sur la théorie GKS (Gustafsson, Kreiss, Sundström)[34][41] permettant l'étude, pour des systèmes linéaires, de la stabilité des conditions aux limites grâce à une analyse spectrale. Cette étude va nous permettre de dégager des conditions de stabilité en fonction des coefficients de couplage α_f et α_s qui nous seront très utiles par la suite pour justifier le choix de ces paramètres.

2.2.1 Modèle Dirichlet-Fourier ou méthode à un coefficient

Discrétisation en différences finies

On rappelle les conditions de raccord de ce modèle :

$$\begin{cases} T_p^{(f)n+\frac{1}{2}} = T_p^{(s)n} \end{cases} \quad (2.9)$$

$$\begin{cases} q_p^{(s)n+1} + \alpha_f^{n+\frac{1}{2}} T_p^{(s)n+1} = -q_p^{(f)n+\frac{1}{2}} + \alpha_f^{n+\frac{1}{2}} T_p^{(f)n+\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (2.10)$$

Il est clair que la discrétisation du problème fluide-solide en différence finis impose l'utilisation d'exposants entiers. Il faut donc nous débarrasser de l'exposant $n + \frac{1}{2}$ en écrivant :

$$\begin{cases} T_p^{(f)n+1} = T_p^{(s)n} \end{cases} \quad (2.11)$$

$$\begin{cases} q_p^{(s)n+1} + \alpha_f^{n+1} T_p^{(s)n+1} = -q_p^{(f)n+1} + \alpha_f^{n+1} T_p^{(f)n+1}, \end{cases} \quad (2.12)$$

sans oublier que le membre de droite de la condition de Fourier de (2.12) reste explicite. En effet, dans cette relation, les variables $q_p^{(s)n+1}$ et $T_p^{(s)n+1}$ sont déterminées à partir des variables $q_p^{(f)n+1}$ et $T_p^{(f)n+1}$ issues du dernier calcul Navier-Stokes.

En outre, on se place en très proche paroi côté fluide (première cellule) et on néglige la convection. Le système se réduit donc à l'équation de la chaleur instationnaire côté fluide et stationnaire côté solide :

$$\begin{cases} \rho C_f \frac{\partial T_f}{\partial t} = k_f \frac{\partial^2 T_f}{\partial x^2} \end{cases} \quad (2.13)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 T_s}{\partial x^2} = 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

On discrétise les équations (2.11) à (2.14) en différences finies en utilisant un schéma spatial à trois points et une intégration temporelle implicite (FIG. 2.3).

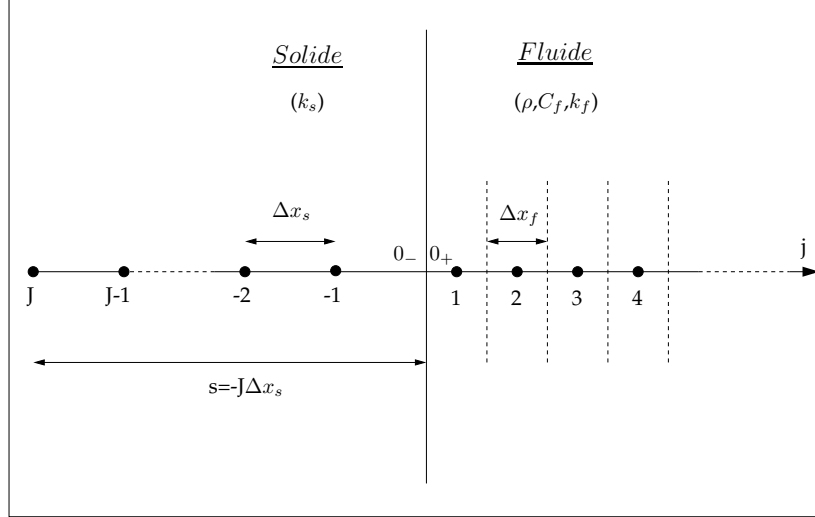


FIG. 2.3 – Discrétisation du problème couplé

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\rho C_f \Delta x_f}{\Delta t} (T_j^{n+1} - T_j^n) = \frac{k_f}{\Delta x_f} (T_{j+1}^{n+1} - 2T_j^{n+1} + T_{j-1}^{n+1}) & \text{si } j > 0 \quad (2.15) \\ T_{0+}^{n+1} = T_{0-}^n & \text{si } j = 0_+ \quad (2.16) \\ T_{j+1}^{n+1} - 2T_j^{n+1} + T_{j-1}^{n+1} = 0 & \text{si } j < 0 \quad (2.17) \\ \frac{k_s}{\Delta x_s} (T_{0-}^{n+1} - T_{-1}^{n+1}) + \alpha_f T_{0-}^{n+1} = \frac{2k_f}{\Delta x_f} (T_1^{n+1} - T_{0+}^{n+1}) + \alpha_f T_{0+}^{n+1} & \text{si } j = 0_- \quad (2.18) \end{array} \right.$$

$$x_j = \begin{cases} j\Delta x_s & \text{si } j < 0 \\ j\Delta x_f & \text{si } j > 0 \end{cases}$$

Les relations (2.16), (2.18) correspondent aux conditions de raccord et les relations (2.15), (2.17) à la discrétisation des équations du fluide et du solide. T_{0-} et T_{0+} sont respectivement les températures de paroi côté solide et côté fluide. Pour pouvoir aller au bout des calculs, on considère que les échanges ont lieu à chaque pas de temps de sorte qu'une itération fluide n corresponde au $n^{\text{ième}}$ échange.

Caractérisation des modes normaux

Nous allons maintenant étudier la stabilité du système discrétisé en utilisant la théorie GKS[34] basée sur la recherche de modes normaux instables, c'est-à-dire pour lesquels on a une divergence en temps.

L'équation de la chaleur étant linéaire et à coefficients constants, les solutions sont de la forme :

$$T(x, t) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} C_p e^{i(k_p x + \omega_p t)} = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} C_p e^{ik_p x} e^{-k_p^2 t} \quad (2.19)$$

k est le nombre d'onde, ω la fréquence et C est l'amplitude complexe. ω et k sont liés par la relation de dispersion $\omega = \omega(k)$. Pour l'équation de la chaleur, on a $\omega(k) = ik^2$.

Dans le cadre de la discrétisation en différences finies et en ne considérant qu'une seule harmonique, les solutions s'écrivent :

$$T_j^n = C e^{i(kx_j + \omega t_n)} = C e^{i(kj\Delta x + \omega n\Delta t)} = C \kappa^j z^n \quad (2.20)$$

avec $\kappa = e^{ik\Delta x}$ et $z = e^{i\omega\Delta t}$.

L'étude de la stabilité consiste à chercher l'existence de modes normaux de la forme $\kappa^j z^n$ tels que $\kappa^j \rightarrow 0$ quand $j \rightarrow \pm\infty$ et pour lesquels on a $|z| > 1$, conduisant à une croissance exponentielle en temps et donc à de l'instabilité. En remplaçant la relation (2.20) dans le système discrétisé formé des équations (2.15) à (2.18), on aboutit, après résolution du système, à une équation qui est fonction des facteurs d'amplification temporel z et spatial κ :

$$z = \frac{\frac{2k_f}{\Delta x_f}}{\frac{k_s}{s} + \alpha_f} \kappa (D, z) - \frac{\frac{2k_f}{\Delta x_f} - \alpha_f}{\frac{k_s}{s} + \alpha_f} \quad (2.21)$$

κ est une fonction de z et du paramètre D qui s'écrit $D = \frac{k_f \Delta t}{\rho C_f \Delta x_f^2}$. Celui-ci n'est rien d'autre que le nombre de Fourier formé à l'aide du pas de temps fluide Δt et du pas d'espace Δx_f . Les calculs qui permettent d'aboutir à la relation (2.21) sont détaillés dans l'annexe B.

Le couplage est stable s'il n'existe aucun z tel que $|z| > 1$ solution de l'équation (2.21). Cela revient à montrer que, pour $|z| > 1$:

$$|g(z)| = \left| \frac{\frac{2k_f}{\Delta x_f}}{\frac{k_s}{s} + \alpha_f} \kappa - \frac{\frac{2k_f}{\Delta x_f} - \alpha_f}{\frac{k_s}{s} + \alpha_f} \right| < 1, \quad (2.22)$$

et cela implique en particulier :

$$\max \{|g|\} < 1 \quad (2.23)$$

Nous avons représenté sur la figure 2.4 le module de g en fonction de z et pour plusieurs valeurs de α_f . Pour les valeurs les plus faibles de α_f (10, 100 et 1000 sur la figure), on constate que $|g|$ est maximum en $z = -1$ (i.e $r = 1, \theta = \pi$). Cependant, à partir d'un α_f suffisamment

grand, on note une transition durant laquelle le maximum de $|g|$ bascule en $z = 1$ (i.e $r = 1$, $\theta = 0, 2\pi$). On met donc ici en évidence l'existence d'un α_f de transition que l'on note $\alpha_f^{(opt)}$ tel que :

$$\max \{|g|\} = \begin{cases} |g(z = -1)| & \text{si } \alpha < \alpha_f^{(opt)} \\ |g(z = -1)| = |g(z = 1)| & \text{si } \alpha_f = \alpha_f^{(opt)} \\ |g(z = 1)| & \text{si } \alpha_f > \alpha_f^{(opt)} \end{cases} \quad (2.24)$$

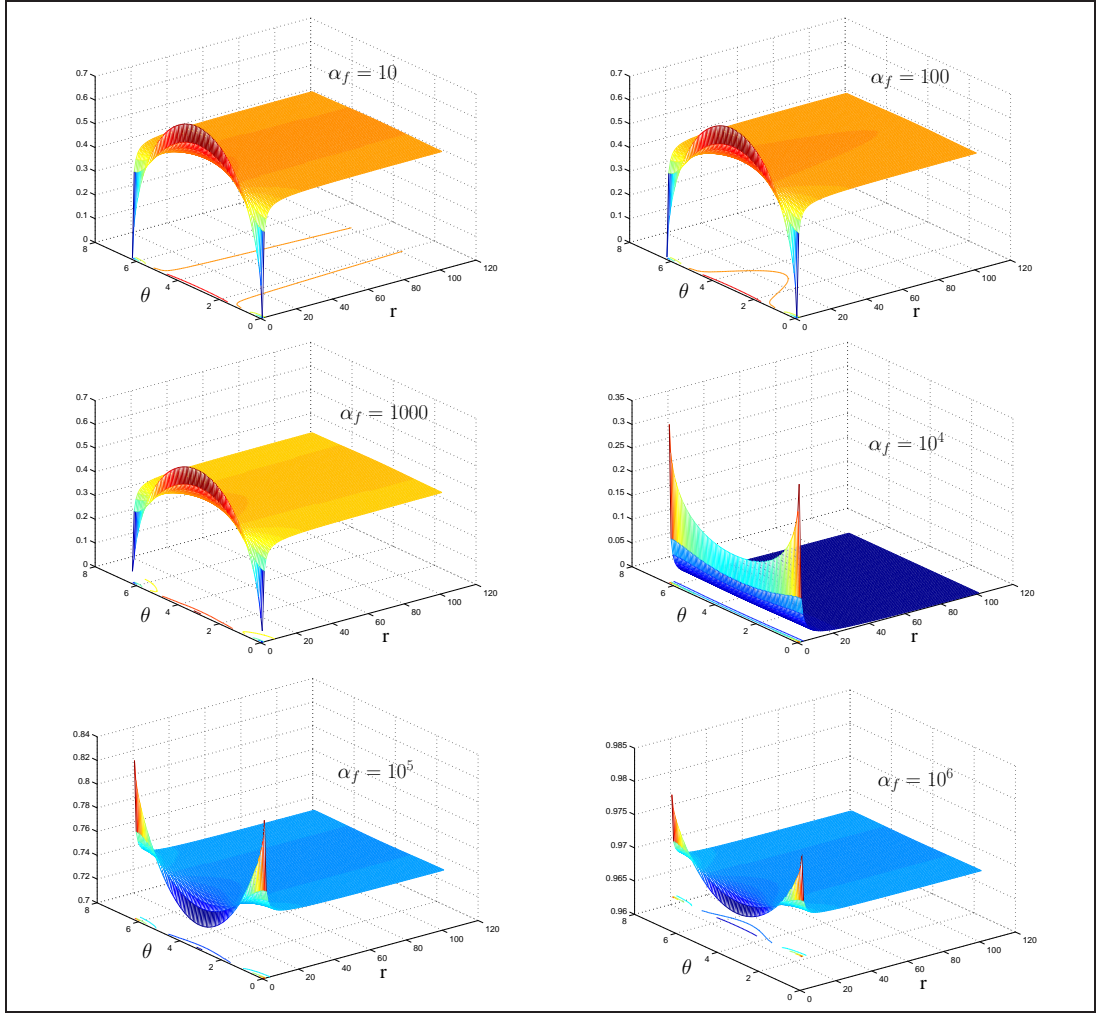


FIG. 2.4 – Module de g en fonction de $z = re^{i\theta}$ pour $r > 1$ et pour plusieurs α_f

Cette transition est d'autant plus visible si l'on représente l'évolution de $\max \{|g|\}$ en fonction de α_f et pour plusieurs valeurs de Δt (FIG. 2.5). On remarque qu'à pas de temps Δt fixé $\max \{|g|\}$ est minimum pour $\alpha_f = \alpha_f^{(opt)}$ et vérifie donc toujours la condition de stabilité. Cette valeur particulière correspond à un coefficient optimal. Pour déterminer explicitement $\alpha_f^{(opt)}$,

on écrit la relation de transition donnée par l'égalité (2.24), à savoir $|g(z = -1)| = |g(z = 1)|$, et on remplace g par son expression donnée par (2.22) :

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{\frac{2k_f}{\Delta x_f} (\kappa(-1) - 1) + \alpha_f^{(opt)}}{\frac{k_s}{s} + \alpha_f^{(opt)}} \right| &= \left| \frac{\frac{2k_f}{\Delta x_f} (\kappa(1) - 1) + \alpha_f^{(t)}}{\frac{k_s}{s} + \alpha_f^{(opt)}} \right| \\
 \left| \frac{\frac{2k_f}{\Delta x_f} \left[\frac{1}{D} - \sqrt{\left(1 + \frac{1}{D}\right)^2 - 1} \right] + \alpha_f^{(opt)}}{\frac{k_s}{s} + \alpha_f^{(opt)}} \right| &= \left| \frac{\alpha_f^{(opt)}}{\frac{k_s}{s} + \alpha_f^{(opt)}} \right| \\
 \left| \frac{2k_f}{\Delta x_f} \left[\frac{1}{D} - \sqrt{\left(1 + \frac{1}{D}\right)^2 - 1} \right] + \alpha_f^{(opt)} \right| &= |\alpha_f^{(opt)}|
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

Le terme $\frac{1}{D} - \sqrt{\left(1 + \frac{1}{D}\right)^2 - 1}$ étant non nul et strictement négatif pour $D > 0$, la solution de l'équation (2.25) est :

$$\alpha_f^{(opt)} = \frac{k_f}{\Delta x_f} \left(\sqrt{\left(1 + \frac{1}{D}\right)^2 - 1} - \frac{1}{D} \right) \tag{2.26}$$

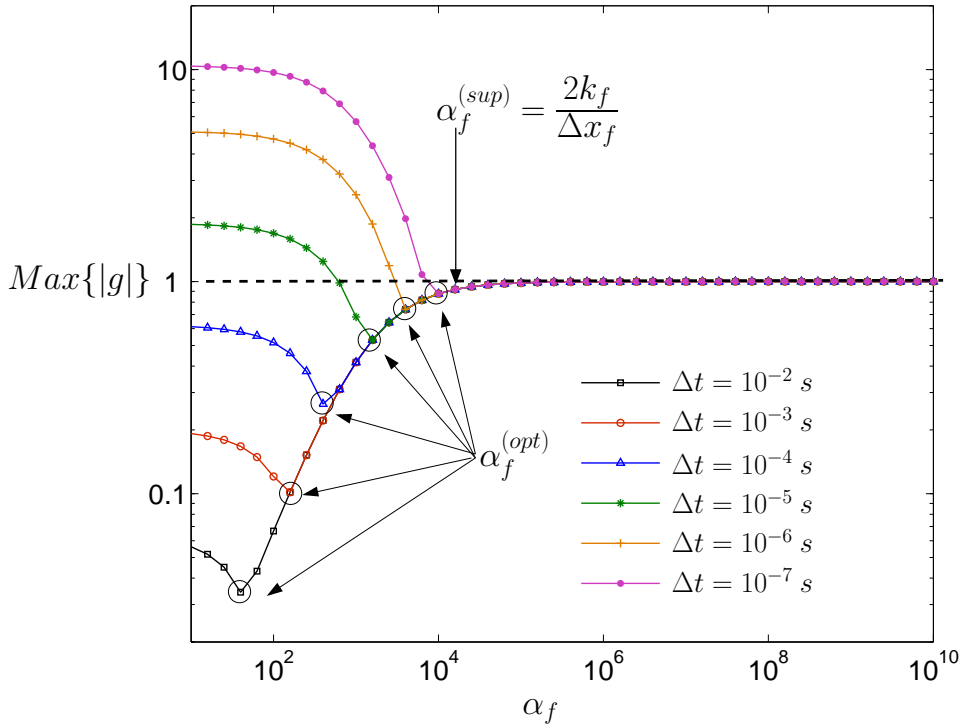


FIG. 2.5 – Stabilité du modèle Dirichlet-Fourier en fonction de α_f

La figure 2.5 met également en évidence une autre valeur remarquable de α_f . Cette valeur correspond à $\frac{2k_f}{\Delta x_f}$ et est équivalente au complément de Schur $S^{(f)}$ côté fluide. Si l'on remplace α_f par cette valeur dans l'expression de $|g|$ de la relation (2.22) on a la condition de stabilité :

$$|g(z)| = \left| \frac{\frac{2k_f}{\Delta x_f}}{\frac{k_s}{s} + \frac{2k_f}{\Delta x_f}} \kappa \right| = \left| \frac{\frac{2k_f}{\Delta x_f}}{\frac{k_s}{s} + \frac{2k_f}{\Delta x_f}} \right| |\kappa| < 1 \quad (2.27)$$

Nous pouvons faire deux remarques. La première est que cette valeur $\frac{2k_f}{\Delta x_f}$ est indépendante du pas de temps fluide contrairement au coefficient optimal $\alpha_f^{(opt)}$. La deuxième remarque est que le rapport $\frac{2k_f}{\Delta x_f}$ est toujours supérieur à $\alpha_f^{(opt)}$, quel que soit le pas de temps considéré (i.e quel que soit D). Si l'on note $\alpha_f^{(sup)} = \frac{2k_f}{\Delta x_f}$, on constate en effet, d'après la figure 2.6, que $\alpha_f^{(opt)}$ est strictement inférieur à $\frac{\alpha_f^{(sup)}}{2}$.

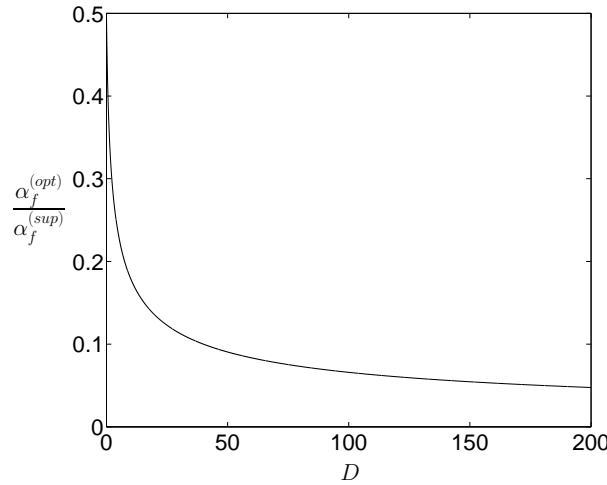


FIG. 2.6 – Evolution du coefficient de transition $\alpha_f^{(opt)}$ en fonction de D

Pour résumer, nous mettons ici en évidence deux coefficients $\alpha_f^{(opt)}$ et $\alpha_f^{(sup)}$ qui vérifient la condition de stabilité. Nous pouvons maintenant nous demander quel coefficient il faut utiliser pour assurer la stabilité du processus itératif sans pour autant pénaliser sa vitesse de convergence. Pour guider ce choix, reprenons les conditions de Dirichlet-Fourier que nous avons définies pour cette étude :

$$T_p^{(f)n+1} = T_p^{(s)n} \quad (2.28)$$

$$q_p^{(s)n+1} + \alpha_f^{n+1} T_p^{(s)n+1} = -q_p^{(f)n+1} + \alpha_f^{n+1} T_p^{(f)n+1} \quad (2.29)$$

Si l'on remplace (2.28) dans (2.29), la condition de Fourier côté solide devient :

$$q_p^{(s)n+1} = -q_p^{(f)n+1} - \alpha_f^{n+1} (T_p^{(s)n+1} - T_p^{(s)n}) \quad (2.30)$$

Cette relation fait apparaître un terme de relaxation $\alpha_f^{n+1} (T_p^{(s)n+1} - T_p^{(s)n})$ qui permet d'amortir le flux issu du milieu fluide $q_p^{(f)n+1}$ en jouant sur α_f . En particulier, si celui-ci est élevé, la convergence sera lente. Il faut donc privilégier le coefficient de couplage le plus faible possible. Or, on a vu d'après la courbe de la figure 2.6 que $\alpha_f^{(sup)}$ est supérieur $\alpha_f^{(opt)}$. En réalité $\alpha_f^{(sup)}$ est même très élevé car inversement proportionnel à la longueur de maille en proche paroi Δx_f . On en déduit que la convergence sera toujours plus lente avec $\alpha_f^{(sup)}$ qu'avec $\alpha_f^{(opt)}$. En outre, le coefficient optimal $\alpha_f^{(opt)}$ a l'avantage de dépendre du pas de temps fluide. En particulier, il augmente quand Δt diminue, comme on peut le remarquer sur les courbes de stabilité de la figure 2.5. La convergence sera alors d'autant plus rapide à grands pas de temps fluides. Ce résultat est très intéressant quand on sait que l'utilisation de ces grands pas de temps est toujours possible grâce aux schémas implicites.

On notera également, toujours sur la figure 2.5, une perte de stabilité à petits pas de temps fluides. Ce résultat peut être surprenant mais n'oublions pas que nous avons fait l'hypothèse qu'une itération en temps n dans le fluide coïncide avec un couplage. En d'autres termes, Δt correspond aussi au temps qui sépare deux couplages successifs. Or, plus ce temps est grand, plus la stabilisation dans le fluide est facilitée. Si l'on extrapole au cas du couplage conduction-convection, on peut faire l'analogie entre le pas de temps fluide Δt de cette étude et le nombre d'itérations Navier-Stokes $\Delta N = N_{n+1} - N_n$ effectuées entre deux couplages (voir FIG. 2.2).

En conclusion, le paramètre α_f^{sup} , souvent préconisé dans la littérature[36], ne prend en compte que deux paramètres (k_f et Δx_f) et ne peut s'adapter à toutes les variations du milieu fluide, en particulier le pas de temps. Ce paramètre est acceptable pour les pas de temps plus petit mais inadapté pour les grands. En revanche, cette étude de stabilité nous a permis de déterminer pour la première fois un coefficient numérique local optimal pour les calculs couplé aérothermiques stationnaires. Ce coefficient, noté $\alpha_f^{(opt)}$ est fonction du pas de temps fluide et assure une convergence rapide.

2.2.2 Modèle Fourier-Fourier ou méthode à deux coefficients

Nous allons maintenant étudier la stabilité du modèle de couplage dans lequel nous utilisons des conditions de raccord de type Fourier de part et d'autre de l'interface. Comme pour le modèle de Dirichlet-Fourier, on considère les conditions équivalentes :

$$\begin{cases} q_p^{(s)n+1} + \alpha_f^{n+1} T_p^{(s)n+1} = -q_p^{(f)n+1} + \alpha_f^{n+1} T_p^{(f)n+1} \end{cases} \quad (2.31)$$

$$\begin{cases} q_p^{(f)n+1} + \alpha_s^n T_p^{(f)n+1} = -q_p^{(s)n} + \alpha_s^n T_p^{(s)n} \end{cases} \quad (2.32)$$

Discretisation en différences finies

En gardant à l'esprit les notations de la figure 2.3, la discrétisation du système s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{\rho C_f \Delta x_f}{\Delta t} (T_j^{n+1} - T_j^n) = \frac{k_f}{\Delta x_f} (T_{j+1}^{n+1} - 2T_j^{n+1} + T_{j-1}^{n+1}) & \text{si } j > 0 \end{cases} \quad (2.33)$$

$$\begin{cases} \frac{2k_f}{\Delta x_f} (T_{0+}^{n+1} - T_1^{n+1}) + \alpha_s T_{0+}^{n+1} = \frac{-k_s}{\Delta x_s} (T_{0-}^n - T_{-1}^n) + \alpha_s T_{0-}^n & \text{si } j = 0_+ \end{cases} \quad (2.34)$$

$$\begin{cases} T_{j+1}^{n+1} - 2T_j^{n+1} + T_{j-1}^{n+1} = 0 & \text{si } j < 0 \end{cases} \quad (2.35)$$

$$\begin{cases} \frac{k_s}{\Delta x_s} (T_{0-}^{n+1} - T_{-1}^{n+1}) + \alpha_f T_{0-}^{n+1} = \frac{-2k_f}{\Delta x_f} (T_{0+}^{n+1} - T_1^{n+1}) + \alpha_f T_{0+}^{n+1} & \text{si } j = 0_- \end{cases} \quad (2.36)$$

En remplaçant les modes (2.20) dans le système discrétisé, on obtient la condition de stabilité (voir annexe B) :

$$|g(z)| = \left| \frac{\frac{2k_f}{\Delta x_f}}{\frac{k_s}{s} + \alpha_f} \left(1 - \frac{\frac{2k_f}{\Delta x_f} - \alpha_f}{\frac{2k_f}{\Delta x_f} + \alpha_s} \right) \kappa + \frac{\left(\frac{2k_f}{\Delta x_f} - \alpha_f \right) \left(\frac{k_s}{s} - \alpha_s \right)}{\left(\frac{2k_f}{\Delta x_f} + \alpha_s \right) \left(\frac{k_s}{s} + \alpha_f \right)} \right| < 1$$

ou encore $\max\{|g|\} < 1$

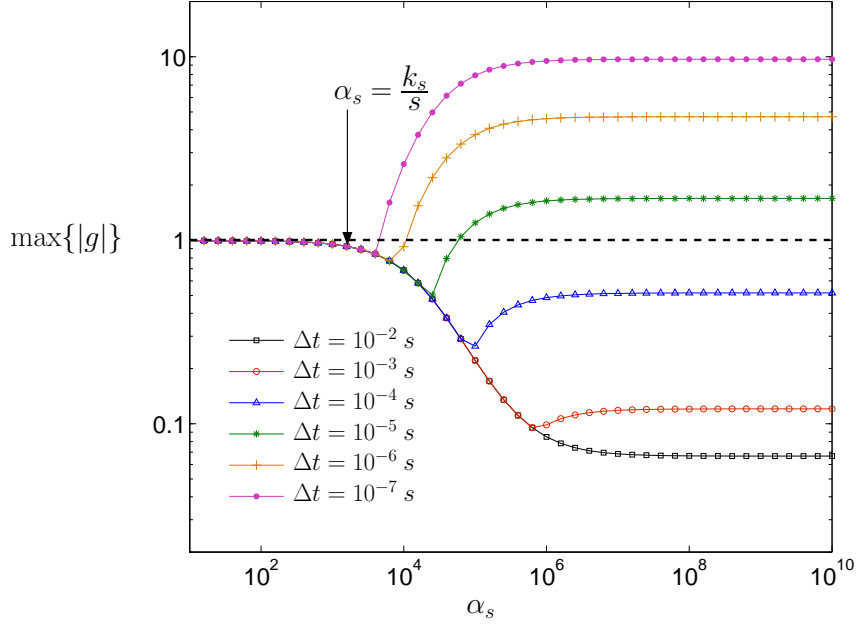
La figure 2.7 donne le comportement de $\max\{|g|\}$ en fonction de α_s avec α_f fixé. Plus précisément, on a pris $\alpha_f = 100$, ce qui correspond à une valeur instable pour la méthode de Dirichlet-Fourier avec un pas de temps fluide supérieur à $\Delta t = 10^{-4}$ s (voir FIG. 2.5). Pour des valeurs élevées du coefficient α_s , on se retrouve dans la situation précédente à savoir la méthode de Dirichlet-Fourier. En effet, quand α_s est grand, la condition de type Fourier (2.32) tend vers une condition de Dirichlet. Dans ce cas, on retrouve les conditions de stabilité de la méthode à un coefficient, c'est-à-dire l'apparition de modes instables pour des petits pas de temps fluides. En revanche, quand on diminue α_s , on constate une stabilisation de ces modes pour des valeurs proches de $\alpha_s = \frac{k_s}{s}$.

De manière générale, si l'on prend $\alpha_f = \frac{2k_f}{\Delta x_f}$ ou $\alpha_s = \frac{k_s}{s}$ la condition de stabilité est toujours vérifiée et s'écrit :

$$|g(z)| = \left| \frac{\frac{2k_f}{\Delta x_f}}{\frac{k_s}{s} + \frac{2k_f}{\Delta x_f}} \kappa \right| = \left| \frac{\frac{2k_f}{\Delta x_f}}{\frac{k_s}{s} + \frac{2k_f}{\Delta x_f}} \right| |\kappa| < 1 \quad (2.37)$$

Ces valeurs particulières de α_f et α_s correspondent aux compléments de Schur du problème de Fourier-Fourier du paragraphe I.1.2.3. Dans ce cas, on montre encore que le couplage est stable quel que soit le pas de temps du fluide.

Les résultats obtenus par cette étude de stabilité nous confirment que le couplage est stable indépendamment du pas de temps fluide quand les paramètres α_f et α_s correspondent aux compléments de Schur respectifs du fluide et du solide $S^{(f)}$ et $S^{(s)}$. Si l'on veut déterminer les paramètres de couplage $\alpha_f^{(opt)}$, $\alpha_f^{(sup)}$ et α_s , il faut connaître les matrices $S^{(f)}$ et $S^{(s)}$.

FIG. 2.7 – Stabilité du modèle Fourier-Fourier avec $\alpha_f = 100$

Cependant, dans le cadre du couplage convection-conduction, le but n'est pas de linéariser le problème global comme dans l'approche de décomposition de domaine mais de garder la spécificité de chacun des codes. En particulier, l'intégration des flux côté fluide s'effectue, comme nous l'avons exposé au chapitre I.1, par une décomposition ADI ramenant le problème à la résolution simple de matrices tridiagonales (résolution par blocs). Cette approximation est possible grâce au caractère structuré de MSD. Or, la détermination de la matrice $S^{(f)}$ nécessite son assemblage, ce qui remettrait d'une part en cause la résolution ADI et serait d'autre part pénalisante du point de vue numérique.

Dans le cas du solide, la matrice globale $S^{(s)}$ issue du problème linéaire existe mais c'est un opérateur plein de dimension $n_d \times n_d$ où n_d est le nombre de nœuds sur l'interface. Il est donc très coûteux de le calculer.

En définitive, nous choisissons donc d'approcher les opérateurs $S^{(f)}$ et $S^{(s)}$ par une approximation locale en proche paroi. Pour le fluide, cette approximation sera déduite du calcul du flux de chaleur pariétal. Côté solide, on approchera localement la matrice de Schur en la condensant sur chaque point de l'interface de couplage.

2.3 Approximation des paramètres de couplage

2.3.1 Coefficient de couplage côté fluide

La détermination du coefficient de couplage local α_f se fait à partir du calcul du flux de chaleur à la paroi q_p . En effet, on peut toujours réécrire celui-ci sous la forme condensée locale :

$$q_p = \alpha_f (T_p - T^*) \quad (2.38)$$

On reconnaît ici une formule de type Fourier : α_f est homogène à un coefficient d'échange local et T^* une température de référence qui dépend du nombre de Reynolds Re et du nombre de Prandtl Pr .

L'idée est de se fixer la température de référence T^* et d'en déduire le coefficient α_f . Le choix le plus évident est de prendre $T^* = T_{I_1}$ où T_{I_1} est la température de première maille (FIG. 2.8). On écrit alors :

$$\alpha_f = \frac{q_p}{T_p - T_{I_1}} \quad (2.39)$$

Ce choix, préconisé par Heselhaus[36] se justifie numériquement. En effet, si le maillage est resserré à la paroi, les échanges thermiques et par là même le flux de chaleur sont plus élevés. Or, dans le même temps, le coefficient α_f augmente puisque $(T_p - T_{I_1})$ diminue, ce qui permet d'augmenter la stabilisation du système.

On voit bien que α_f est ici un coefficient purement numérique dont la seule vocation est de s'adapter au maillage en vue de stabiliser le système.

Dans le cas de maillages plus grossiers, le flux de chaleur s'écrit selon la loi de paroi de Dutoya exposée au chapitre I.1 :

$$q_p = \frac{\mu_p c_p}{Pr} \left(T_p - \left(T_{I_1} + r \frac{\gamma - 1}{2} M_{I_1}^2 \right) \right) (1 + \beta(Re_\Delta, Pr, Pr_t))$$

avec les coefficients :

$$\left\{ \begin{array}{l} Re_\Delta = \frac{\|\vec{u}_t\| \Delta}{\nu_p} \\ r = \frac{\sqrt{Pr} + Re_t Pr_t}{1 + Re_t} \\ \delta = \left(\frac{Re_\Delta}{462} \right)^{0.825} \frac{\left(\frac{Re_\Delta}{120} \right)^2}{1 + \frac{Re_\Delta}{80} + \left(\frac{Re_\Delta}{120} \right)^2} \\ \beta = \delta \frac{\frac{Pr}{Pr_t}}{1 + \mathcal{H} \sqrt{\frac{2\delta}{Re_\Delta + 300}}} \\ \mathcal{H} = 9.24 \left(\frac{Pr}{Pr_t}^{\frac{3}{4}} - 1 \right) \left(1 + 0.28e^{-0.007 \frac{Pr}{Pr_t}} \right) \end{array} \right. \quad (2.40)$$

Le coefficient de couplage α_f s'écrit donc :

$$\alpha_f = \frac{q_p}{T_p - T_{I_1}} = \frac{\frac{\mu_p c_p}{Pr} \left(T_p - \left(T_{I_1} + r \frac{\gamma - 1}{2} M_{I_1}^2 \right) \right) (1 + \beta(Re_\Delta, Pr, Pr_t))}{T_p - T_{I_1}} \quad (2.41)$$

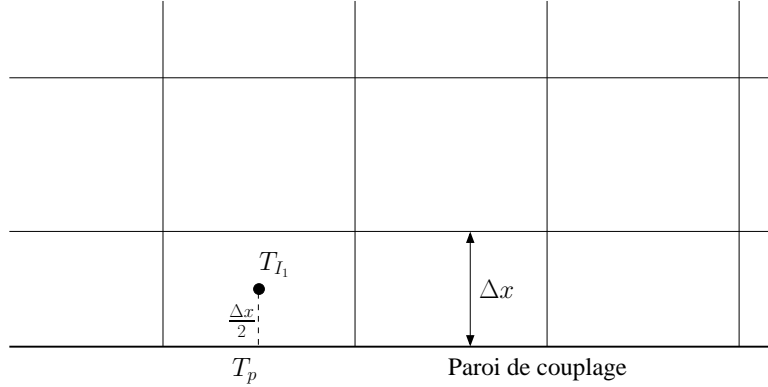


FIG. 2.8 – Calcul du coefficient α_f

On remarque que si l'on néglige la convection, le flux de chaleur s'écrit, avec les notations de la figure 2.8 :

$$q_p = \frac{\mu_p c_p}{Pr} \frac{T_p - T_{I_1}}{\frac{\Delta x}{2}} = \frac{2k_f}{\Delta x} (T_p - T_{I_1}) \quad (2.42)$$

On retrouve le coefficient $\alpha_f^{(sup)} = \frac{2k_f}{\Delta x}$ introduit dans l'étude de stabilité et qui correspond à la valeur stable du coefficient de couplage dans le cas purement diffusif et stationnaire.

2.3.2 Coefficient de couplage côté solide

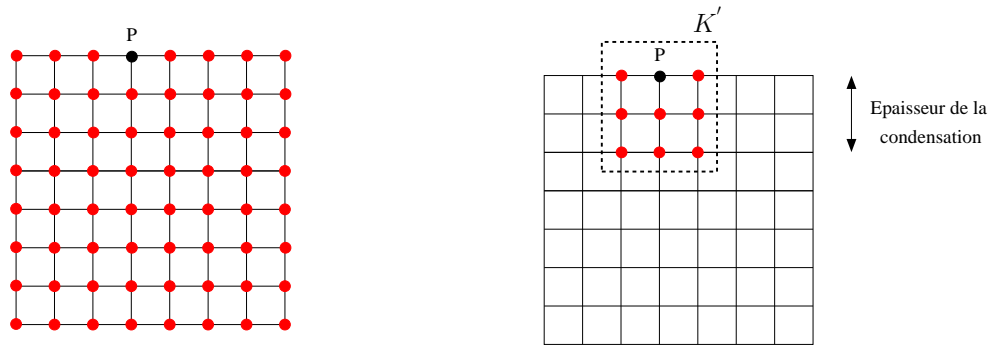
Le coefficient de couplage α_s est le résultat d'une condensation de la matrice de conductivité K en chaque point M de l'interface :

$$K = \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ip} \\ K_{pi} & K_{pp} \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha_s = (K_{pp} - K_{pi} K_{ii}^{-1} K_{ip})$$

La matrice K_{pp} se résume alors à un scalaire. Dans l'absolu, cette condensation est complète, c'est-à-dire qu'elle tient compte de tous les points de la structure. Il est clair que l'opération est très coûteuse en raison notamment de la dimension de la matrice K_{ii} . En conséquence, nous effectuons une condensation partielle définie par Magoulès et Roux[44], c'est-à-dire en ne considérant qu'un certain nombre de points ou plus exactement de couches de points (FIG. 2.9).

La matrice à condenser est la matrice réduite K' correspondant aux points mis en jeu.

$$K' = \begin{bmatrix} K'_{ii} & K'_{ip} \\ K'_{pi} & K'_{pp} \end{bmatrix} \text{ avec } \dim\{K'_{ii}\} \ll \dim\{K_{ii}\}$$

FIG. 2.9 – *Condensations complète (à g.) et partielle (à d.)*

Chapitre 3

Synchronisation des échanges numériques

Dans les deux chapitres précédents nous avons présenté les méthodes de couplage envisagées, en d'autres termes les conditions de raccord à l'interface. Nous allons maintenant expliquer comment les quantités physiques sont transférées d'un code à l'autre. Dans un premier temps, nous décrirons le rôle joué par l'outil informatique MpCCI dans ce transfert. Dans un deuxième temps, nous exposerons les types de synchronisation possibles quant au déclenchement des échanges.

3.1 Bibliothèque de couplage MpCCI

MpCCI (Mesh parallel Code Coupling Interface)[35] est une bibliothèque informatique dont le rôle est le traitement puis le transfert de données entre codes de calcul. Elle est basée sur l'environnement MPI et permet de coupler une ou plusieurs applications. Ce produit est développé par *The Fraunhofer-Institute for Algorithms and Scientific Computing (SCAI)* basée en Allemagne et a l'avantage d'être facile d'utilisation et compatible avec de nombreuses architectures (SUN, SGI, IBM, Hitachi, Fujitsu, CRAY T3E, PC WIndows, PC Linux).

MpCCI peut être considérée comme une spécialisation ou encore une couche supérieure de MPI pour le couplage de codes de calcul (FIG. 3.1). La bibliothèque gère les interfaces géométriques entre les codes et permet d'y échanger des quantités physiques comme la température, le flux de chaleur, la pression, les déplacements etc... On considère ici un couplage uniquement surfacique.

Les codes utilisés peuvent être parallèles. Dans ce cas, chaque process interne, c'est-à-dire qui ne participe pas au couplage, reste à la charge exclusive de MPI pour les communications alors que les process liés au couplage externe sont traités par MpCCI pour la gestion des données à échanger puis par MPI pour les envois/réceptions par la messagerie. Les communications inter-process sont résumées sur la figure 3.2.

L'implémentation de la bibliothèque MpCCI est assez simple et respecte la structure de chaque code de calcul. Elle consiste à appeler différentes fonctions qui jouent chacune un rôle précis

(initialisation, création des partitions couplées, définition des quantités à échanger, déclenchement des échanges etc,...).

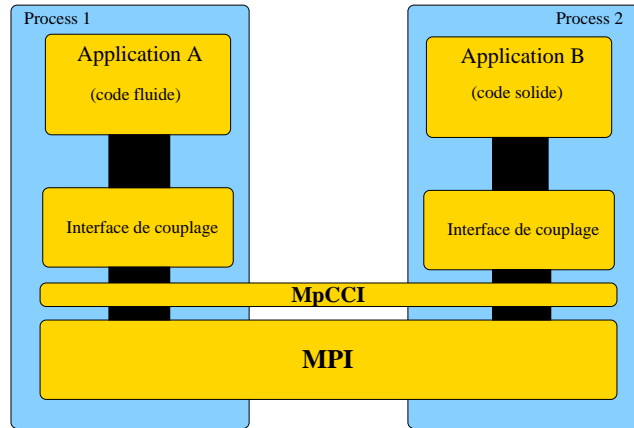


FIG. 3.1 – Organisation du couplage

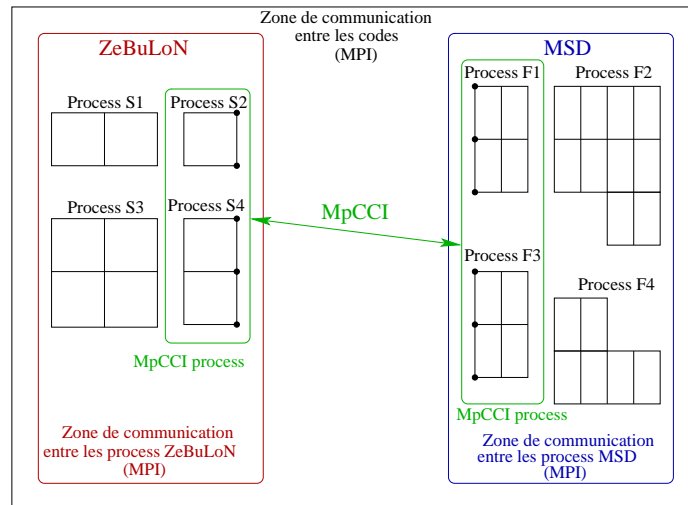


FIG. 3.2 – Communications

3.1.1 Structure

Les fonctions MpCCI se divisent en trois grandes catégories qui correspondent à trois phases distinctes d'un calcul couplé : l'initialisation, le calcul proprement dit et le contrôle du calcul. L'initialisation correspond à la définition des surfaces couplées. La partie calcul, qui est la plus importante, gère les envois et réceptions de données ainsi que la synchronisation des échanges. Enfin, dans la partie contrôle du calcul, l'utilisateur peut suivre tous les paramètres liés au couplage comme la convergence par exemple. La structure de MpCCI est détaillée dans l'annexe C.

3.1.2 Traitement géométrique

Le principal intérêt de la bibliothèque MpCCI est le traitement géométrique effectué au niveau de l'interface entre deux maillages. Celui-ci détermine en effet la façon dont ces maillages communiquent et tient compte du fait que les surfaces couplées ne sont pas forcément confondues (FIG. 3.3). MpCCI possède plusieurs algorithmes de recherche géométrique en fonction du type de quantité à échanger. Le principe général est d'associer les nœuds et les éléments du premier maillage avec ceux du second pour en déduire des coefficients d'interpolation. Les différentes méthodes de recherche géométrique sont données dans l'annexe C

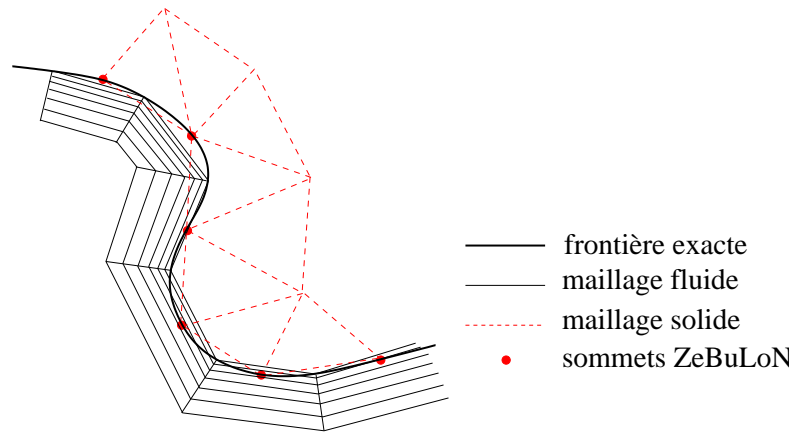


FIG. 3.3 – Interface de couplage

3.1.3 Interpolations

Une fois le traitement géométrique effectué, on utilise des méthodes d'interpolation pour le transfert des quantités physiques entre les deux maillages. Selon le type de quantité considéré, on peut définir deux méthodes d'interpolation : conservative et non-conservative. Dans la suite nous désignerons par « point source » les points d'origine de la quantité à envoyer et par « point cible » ceux qui reçoivent cette même quantité.

Interpolation non-conservative

Dans ce type d'interpolation, les points sources sont localisés aux nœuds du maillage émetteur alors que le point cible est situé au centre de l'élément du maillage récepteur (FIG. 3.4). On note respectivement s_i et t les valeurs de la quantité échangée aux points sources et cible.

Si u et v sont les coordonnées du point cible dans l'élément formé par les points sources, on a l'interpolation suivante :

$$t = \sum_i N_i(u, v) s_i, \quad (3.1)$$

où les fonctions d'interpolation $N_i(u, v)$ sont bilinéaires :

$$\begin{cases} N_1(u, v) = (1 - v)(1 - u) \\ N_2(u, v) = (1 - v)u \\ N_3(u, v) = v(1 - u) \\ N_4(u, v) = vu \end{cases}$$

Ce type d'interpolation est notamment adapté à la température.

Interpolation conservative

Dans ce cas, la situation est inversée par rapport à l'interpolation précédente dans la mesure où il y a un seul point source. Celui-ci peut être un nœud ou le centre d'un élément. Les points cibles définissent quant à eux des nœuds (FIG. 3.4). Si l'on note $N_i(u, v)$ les fonctions d'interpolation de l'élément récepteur, chaque point cible reçoit la quantité $\omega_i = N_i(u, v) \times s$ avec $\sum_i \omega_i = 0$.

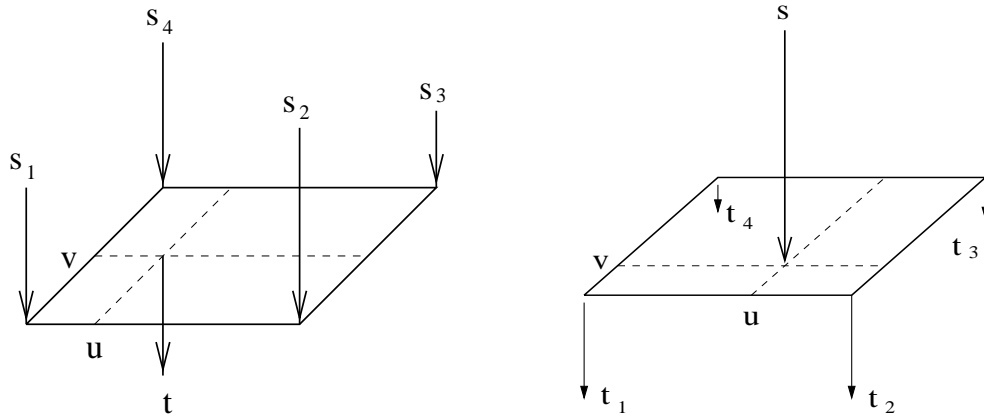


FIG. 3.4 – Interpolations non-conservative (à g.) et conservative (à d.)

On utilise cette méthode pour les quantités de type flux.

3.2 Dynamique des échanges

3.2.1 Synchronisation

La synchronisation et le déclenchement des échanges entre les codes sont très importants pour la convergence. On peut choisir de les synchroniser, c'est-à-dire d'effectuer les échanges simultanément de MSD vers ZeBuLoN et de ZeBuLoN vers MSD. La deuxième solution est de décaler dans le temps les communications en faisant un échange après l'autre (FIG. 3.5).

Echanges simultanés

Dans ce cas, on définit, pour chaque code, un point de synchronisation symbolisé par un entier quelconque (111 pour MSD et 4 pour ZeBuLoN par exemple). Pour chacun de ces points de synchronisation, les données sont envoyées et reçues en même temps.

Echanges décalés

Dans ce cas, on effectue des échanges décalés dans le temps. Cette méthode nécessite deux points de synchronisation pour la structure : au point n°4, le code reçoit des données sans en envoyer et au point n°5 il envoie des données sans en recevoir. Côté fluide, le point n°111 joue le même rôle que précédemment, à savoir envoi et réception.

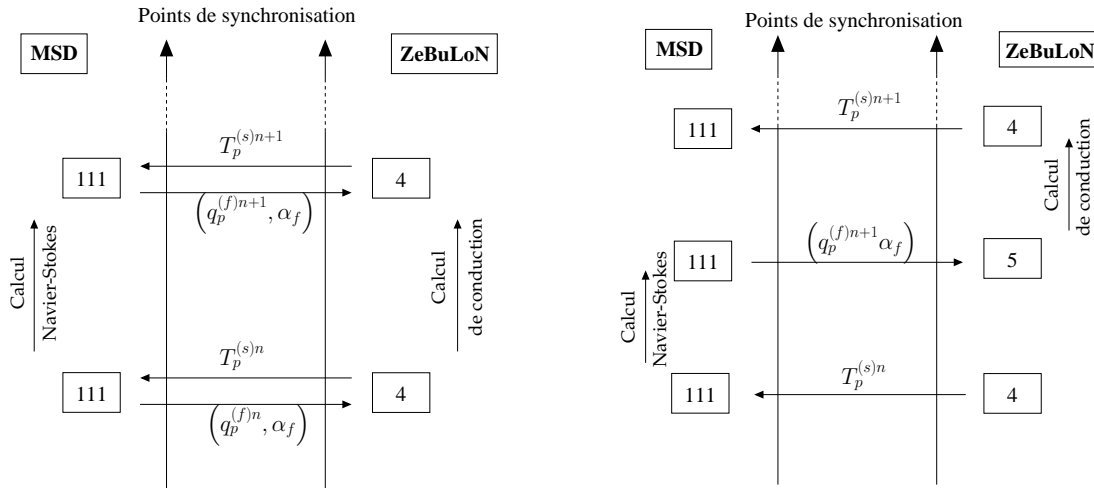


FIG. 3.5 – *Echanges simultanés (à g.) et décalés (à d.)*

Nous avons opté pour des échanges décalés qui permettent une réactualisation de la structure directement avec les données issues du dernier calcul Navier-Stokes.

3.2.2 Déclenchement des échanges

Il est logique de penser que le temps de calcul augmente avec le nombre d'échanges effectués entre les deux codes. L'enjeu est donc d'en avoir le moins possible, en d'autres termes de trouver des critères permettant d'optimiser leur déclenchement.

Dans le cadre du couplage en régime permanent, la résolution des équations de Navier-Stokes dans le code MSD est dite pseudo-stationnaire dans la mesure où l'on utilise un pas de temps local non physique. En revanche, le code structure effectue une résolution purement stationnaire. Le déclenchement des échanges sera donc fonction de l'état du fluide au cours des itérations Navier-Stokes : le couplage est complètement « piloté » par le code fluide. La figure 3.6 résume la dynamique des échanges en fonction des itérations Navier-Stokes.

Le déclenchement du couplage avec la structure est fonction de l'itération Navier-Stokes N considérée. Toutes les ΔN itérations, le fluide est couplé avec un état stationnaire donné dans la structure qui effectue une résolution directe de la conduction¹.

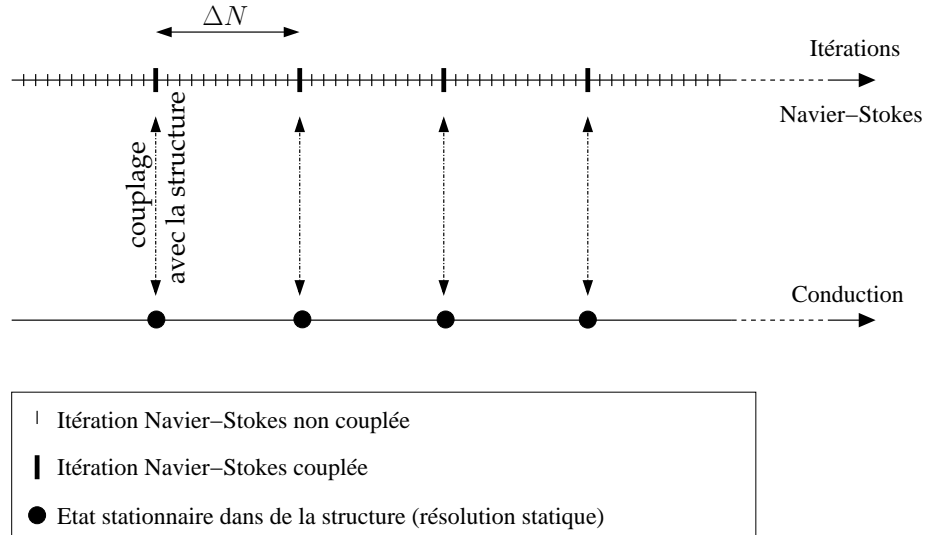


FIG. 3.6 – *Dynamique du couplage*

Dans ce cas présent, on déclenche les échanges à intervalles réguliers ΔN sans vraiment tenir compte de l'évolution du fluide en fonction du temps. Plus ces intervalles sont grands, plus le couplage avec la structure sera faible et stable. Cependant, avec ΔN constant, on contrôle mal le processus car le besoin de couplage est différent en fonction de l'avancement du calcul Navier-Stokes. En effet, pour atteindre l'état stationnaire couplé le plus rapidement possible, il convient de faire des échanges fréquents en début de calcul. En revanche, les échanges sont de moins en moins nécessaires au fur et à mesure que l'on approche de la convergence, ce qui nous permet d'économiser du temps de calcul. Une période d'échange fixe nous pénalise de toute façon dans un cas comme dans l'autre : si l'on choisit ΔN faible, on satisfait les contraintes de début de calcul mais on effectue globalement beaucoup plus d'échanges que nécessaire ; si ΔN est grand la convergence sera plus lente.

Si l'on veut optimiser au maximum le nombre d'échanges nécessaires à l'obtention de l'état stationnaire, la solution est d'introduire un couplage dynamique, c'est-à-dire qui se déclenche automatiquement selon l'état du fluide. Il convient donc de définir un critère dans le fluide autorisant le déclenchement ou non d'un couplage. Nous allons reprendre celui donné par Heselhaus[36] qui compare la variation de la température au voisinage de la paroi au dernier échange n à la variation de la température dans la première maille entre l'itération Navier-Stokes courante N et le dernier échange n .

¹La résolution peut être directe ou itérative. Dans ce dernier cas le solveur n'effectue qu'une ou deux itérations internes et la structure conserve son caractère statique vis-à-vis du couplage.

En faisant la moyenne sur la première couche de maille on définit la relation :

$$\underbrace{\left\| \widetilde{T_{I_1}^{(f)N}} - T_{I_1}^{(f)n} \right\|}_{\text{Variation moyenne de la température du fluide dans la première couche de mailles depuis le dernier échange.}} > \epsilon \times \underbrace{\left\| \widetilde{T_{I_1}^{(f)n}} - T_p^{(f)n} \right\|}_{\text{Ecart moyen entre la température du fluide au dernier échange et la température de paroi fournie par le solide.}} \quad (3.2)$$

Si la relation (3.2) est satisfaite, le couplage est déclenché.

Troisième partie

Applications en régime permanent

Nous allons maintenant mettre en application les méthodes décrites dans la partie II. Dans le premier chapitre, nous allons définir deux cas tests : le premier est le cas élémentaire de la plaque plane et le deuxième est celui d'un écoulement autour d'une aube de turbine haute pression. Ces deux calculs vont nous permettre d'une part de vérifier les résultats obtenus sur la convergence et la stabilité des conditions de raccord, et d'autre part de valider les calculs numériques au moyen d'une solution analytique dans le cas de la plaque plane et expérimentale dans le cas de l'aube.

Dans le deuxième chapitre, nous donnerons un exemple qui illustre parfaitement la nécessité de décrire les échanges thermiques entre le fluide et le solide, à savoir le refroidissement de paroi par multiperforation. Il s'agit d'utiliser de l'air externe pour refroidir la paroi d'une chambre de combustion via une multitude de trous. C'est à notre connaissance la première fois qu'un calcul 3D couplé est utilisé pour analyser ce mode de refroidissement.

Chapitre 1

Cas de validation

1.1 Écoulement sur une plaque plane

Le cas le plus simple de couplage fluide-solide est celui qui décrit un écoulement sur une plaque plane. Nous nous intéressons à l'état stationnaire couplé du système, en particulier aux profils de température et de flux de chaleur à la paroi. Nous allons étudier dans un premier temps la convergence des méthodes de couplage de type Dirichlet-Fourier et Fourier-Fourier. Dans un deuxième temps, nous validerons les résultats en les comparant à une solution analytique faisant intervenir le nombre de Brun. Enfin, nous mettrons en évidence l'influence du couplage en comparant la solution couplée avec le cas non couplé, c'est-à-dire un écoulement sur une plaque d'épaisseur nulle.

1.1.1 Etude des coefficients de couplage

Dans le chapitre II.2, nous avons étudié la stabilité du système couplé en fonction du ou des coefficients de couplage. Nous avons mis en évidence un certain nombre de résultats quant au choix de ces coefficients.

Nous allons vérifier ces différents résultats en étudiant un cas élémentaire, à savoir un écoulement sur une plaque plane.

Conditions de Dirichlet-Fourier

On rappelle les conditions de Dirichlet-Fourier :

$$\begin{cases} T_p^{(f)n+\frac{1}{2}} = T_p^{(s)n} \\ q_p^{(s)n+1} + \alpha_f^{n+\frac{1}{2}} T_p^{(s)n+1} = -q_p^{(f)n+\frac{1}{2}} + \alpha_f^{n+\frac{1}{2}} T_p^{(f)n+\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (1.1)$$

$$(1.2)$$

L'efficacité de la méthode de couplage est évidemment conditionnée par le choix du coefficient α_f calculé dans le fluide. Dans l'étude de stabilité, on a mis en évidence deux coefficients particuliers $\alpha_f^{(opt)}$ et $\alpha_f^{(sup)}$. Ils sont purement numériques et permettent de stabiliser le processus itératif par l'intermédiaire d'un terme de relaxation.

On rappelle leurs expressions :

$$\begin{aligned}\alpha_f^{(sup)} &= \frac{q_p^{(f)}}{T_p^{(f)} - T^*} \\ \alpha_f^{(opt)} &= \frac{\alpha_f^{(sup)}}{2} \left(\sqrt{\left(1 + \frac{1}{D}\right)^2 - 1} - \frac{1}{D} \right),\end{aligned}\quad (1.3)$$

avec $D = \frac{k_f \Delta t}{\rho C_f \Delta x^2}$. On rappelle que T^* est la température de première maille adjacente à la paroi.

$\alpha_f^{(sup)}$ s'écrit comme un coefficient d'échange local en très proche paroi. Si l'on fait l'analogie avec l'étude de stabilité, il est homogène à $\frac{2k_f}{\Delta x_f}$. $\alpha_f^{(opt)}$ est le coefficient de transition de l'étude de stabilité. On rappelle qu'il dépend du pas de temps fluide et est inférieur à $\alpha_f^{(sup)}$.

Comparons l'efficacité de ces deux coefficients en terme de stabilité et de convergence sur un calcul laminaire puis sur un calcul turbulent. Cette distinction nous permet de faire varier les transferts de chaleur à la paroi et ainsi d'étudier le comportement de la méthode de couplage dans les deux situations.

Calcul laminaire

On considère le cas simple d'un écoulement laminaire sur une plaque plane. Les paramètres de dimensionnement et les conditions aux limites du calcul sont résumés sur la figure 1.1. Côté fluide, on considère un profil de vitesse et de température constant à l'entrée et une sortie à la pression atmosphérique. La plaque est supposée comme adiabatique en entrée/sortie de sorte que le transfert de chaleur par conduction soit unidirectionnel suivant l'axe perpendiculaire à la paroi. On maintient enfin la face arrière de la plaque à la température constante T_e .

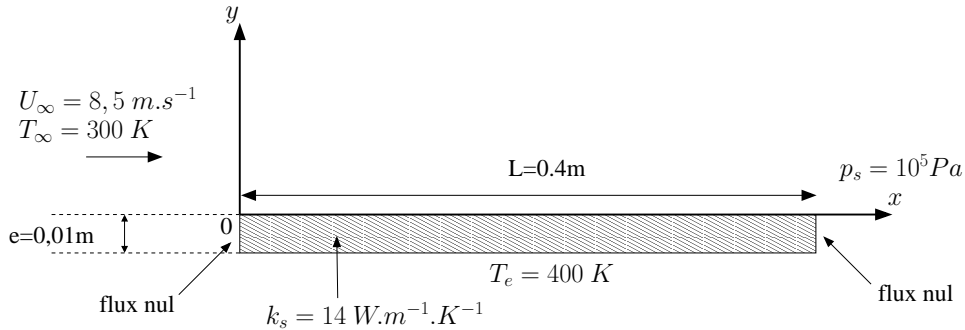


FIG. 1.1 – Plaque plane - calcul laminaire

Le nombre de Reynolds basé sur la longueur de la plaque vaut :

$$Re_L = \frac{U_\infty L}{\nu} = \frac{8.5 \times 0.4}{2.10^{-5}} \approx 1.7.10^5$$

Calcul turbulent

La configuration du calcul est représentée sur la figure 1.2.

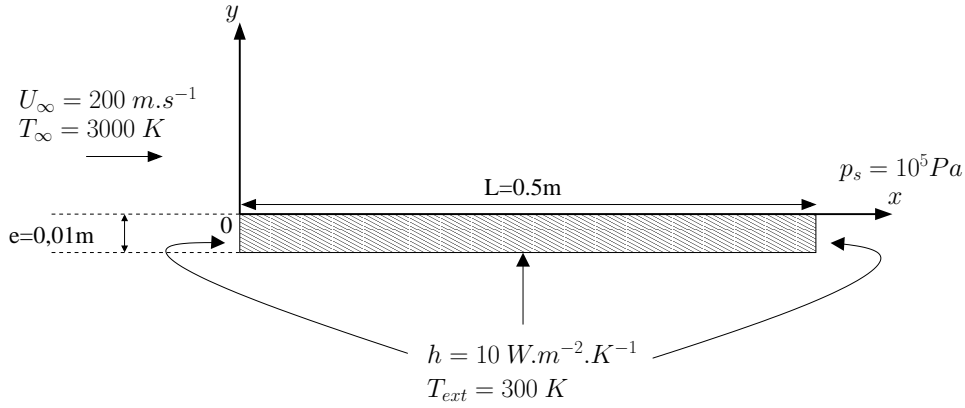


FIG. 1.2 – Plaque plane - calcul turbulent

Dans le but d'augmenter de façon conséquente les transferts de chaleur à la paroi, on considère un écoulement d'air à très haute température sur une plaque exposée, sur ces bords extérieurs, à la convection de l'air ambiant. La conductivité du matériau est $k_s = 35 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$. Le Reynolds correspondant est, à $T = 3000 \text{ K}$:

$$Re_L = \frac{U_\infty L}{\nu} = \frac{200 \times 0,5}{4.10^{-4}} \approx 2,5.10^5$$

Résultats

Notons avant toute chose que chaque pas de temps dans le fluide correspond approximativement à un nombre de CFL égal à 10.

Les figures 1.3 et 1.4 donnent respectivement dans le cas laminaire et turbulent, l'évolution de la température et du nombre de Nusselt $Nu = \frac{hL}{k_f} = \frac{q_p L}{k_f(T_p - T_\infty)}$ le long de la paroi à l'état stationnaire. Dans le cas laminaire, nous avons représenté la température adimensionnée $\theta_p = \frac{T_p - T_\infty}{T_e - T_\infty}$. D'après la valeur des nombres de Nusselt, on vérifie bien que les transferts de chaleur sont beaucoup plus élevés dans le cas turbulent.

Si l'on regarde la convergence des deux calculs, on se rend compte que le choix du coefficient de couplage joue un rôle important. En effet, nous avons représenté sur les figures 1.5 et 1.6 l'évolution des résidus R_T et R_q ¹ liés respectivement à la convergence de la température et du flux de chaleur en fonction du nombre de couplages et pour chaque coefficient α_f . Dans le cas laminaire, α_f n'a pas d'influence sur la convergence du processus itératif. En d'autres termes, le nombre d'échanges nécessaires pour atteindre cette convergence est identique. En revanche, dans le cas turbulent la convergence est fortement accélérée avec $\alpha_f = \alpha_f^{(opt)}$. Le nombre de couplages passe de 1859 avec $\alpha_f^{(sup)}$ à 266 avec $\alpha_f^{(opt)}$, soit un gain considérable en

¹L'expression des résidus est donnée au chapitre (II.2).

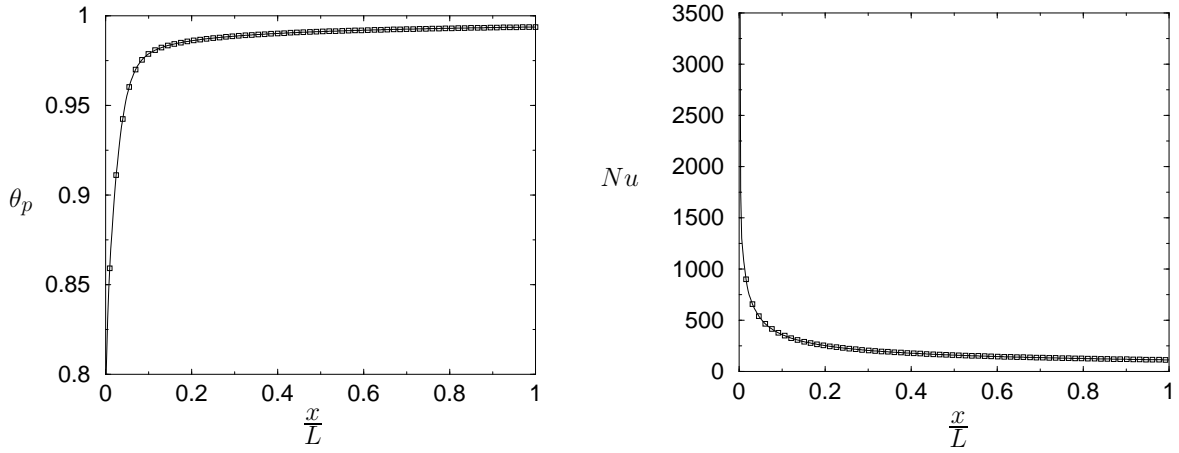


FIG. 1.3 – Profils de température et de Nusselt le long de la paroi en régime laminaire

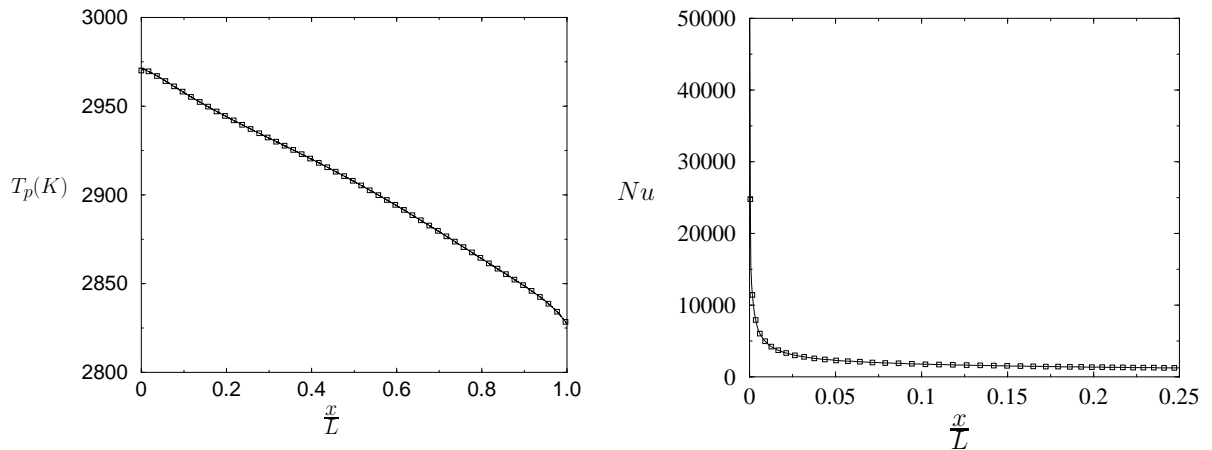
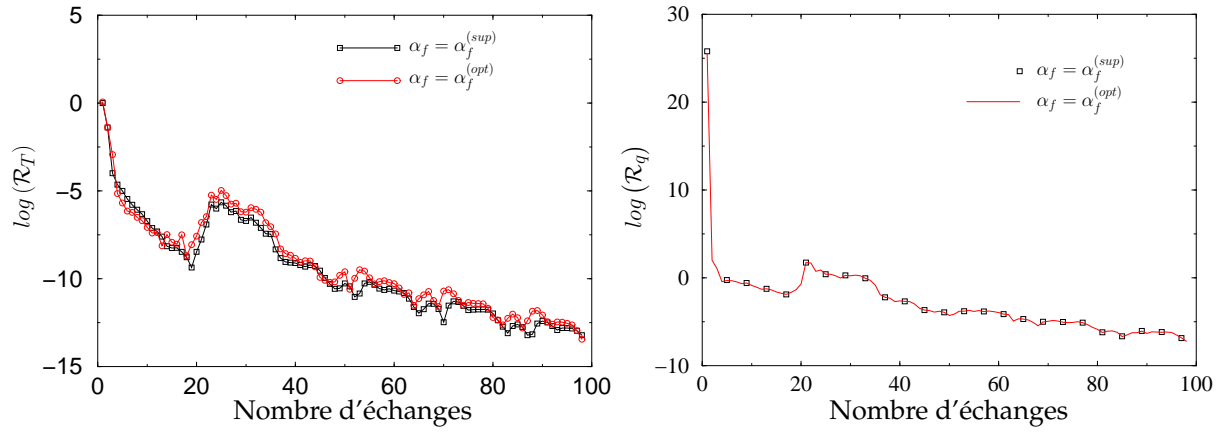
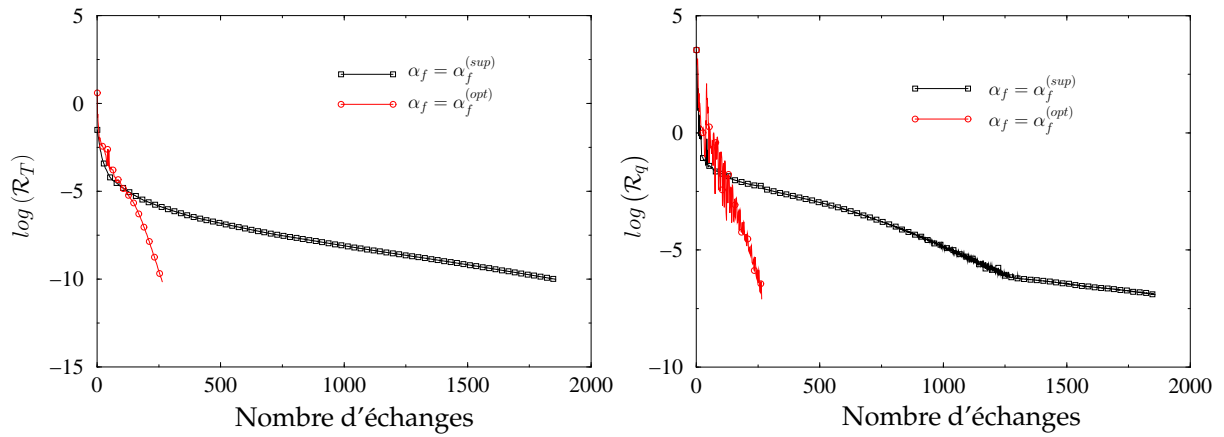
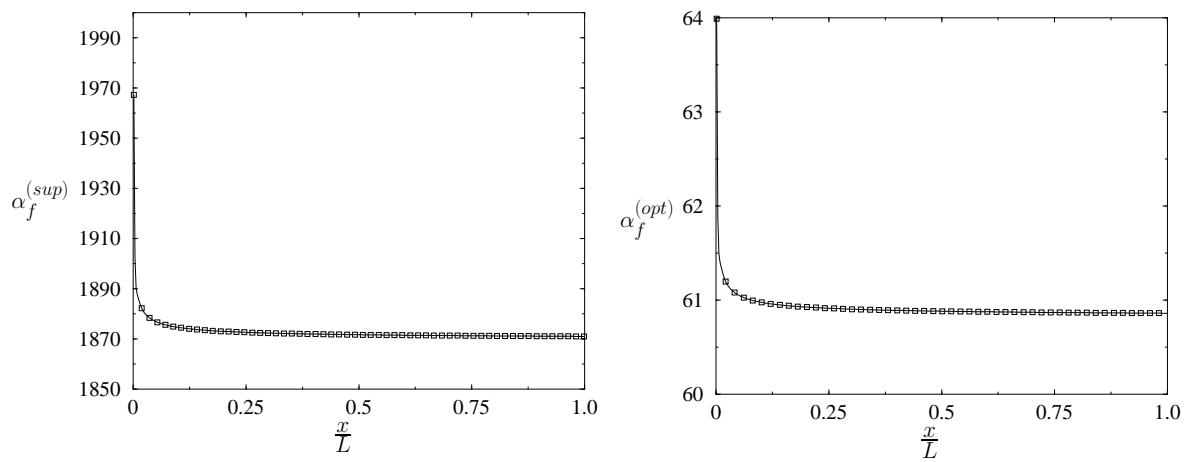


FIG. 1.4 – Profils de température et de Nusselt le long de la paroi en régime turbulent

termes de temps CPU.

Pour expliquer une telle différence de comportement, regardons de plus près les coefficients de couplage. Il sont représentés sur les figures 1.7 et 1.8 le long de la paroi. Dans le cas turbulent, les échanges thermiques à la paroi sont très importants, ce qui donne un coefficient $\alpha_f^{(sup)}$ élevé. Or, l'utilisation d'un coefficient de relaxation élevé ralentit la convergence car le processus, bien que stable, est très rigide. En d'autres termes, les échanges thermiques sont fortement amortis, ce qui pénalise la convergence. C'est pour cette raison que l'utilisation d'un coefficient beaucoup plus faible, comme c'est le cas de $\alpha_f^{(opt)}$, accélère cette convergence de façon spectaculaire car le système est moins rigide. En outre, l'avantage de $\alpha_f^{(opt)}$ est qu'il diminue quand le pas de temps fluide augmente. On en déduit qu'à grand pas de temps, la convergence est encore plus rapide par rapport à $\alpha_f^{(sup)}$. Par contre, dans le cas laminaire, le coefficient $\alpha_f^{(sup)}$ est beaucoup plus faible. Les échanges thermiques sont peu amortis par le terme de relaxation et la convergence n'est pas pénalisée. Il semble donc que l'utilisation du coefficient optimal $\alpha_f^{(opt)}$ n'améliore pas cette convergence de façon significative.

FIG. 1.5 – *Evolution des résidus en régime laminaire*FIG. 1.6 – *Evolution des résidus en régime turbulent*FIG. 1.7 – *Evolution des coefficients de couplage le long de la paroi en régime laminaire*

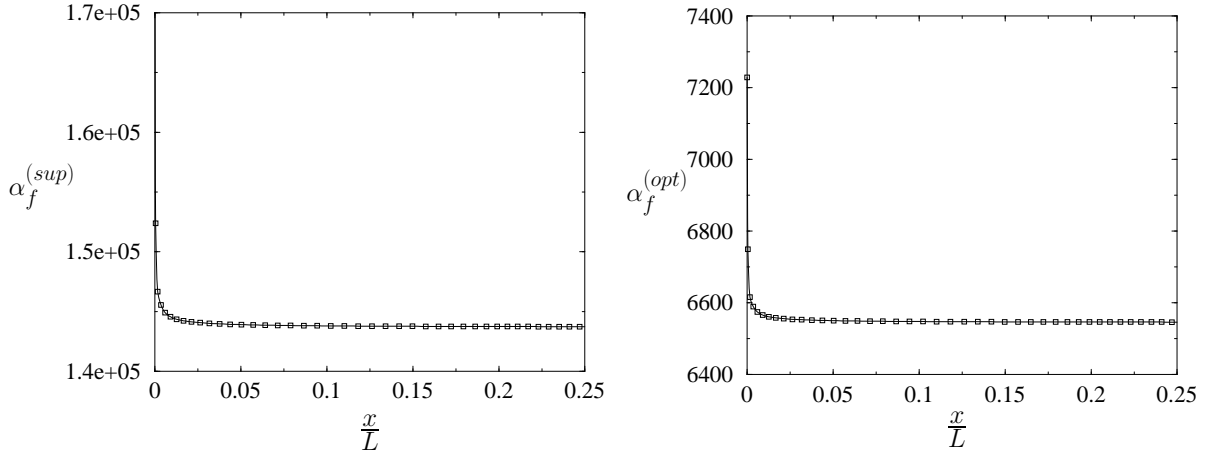


FIG. 1.8 – Evolution des coefficients de couplage le long de la paroi en régime turbulent

Remarque : Nous avons vu que le coefficient $\alpha_f^{(opt)}$ dépendait du pas de temps fluide. Or, les calculs Navier-Stokes sont stationnaires, c'est-à-dire avec l'utilisation d'un pas de temps local. On considère alors le pas de temps moyen sur l'ensemble du domaine fluide.

Conditions de Fourier-Fourier

On rappelle les conditions de Fourier-Fourier :

$$\begin{cases} q_p^{(f)n+\frac{1}{2}} + \alpha_s^n T_p^{(f)n+\frac{1}{2}} = -q_p^{(s)n} + \alpha_s^n T_p^{(s)n} \\ q_p^{(s)n+1} + \alpha_f^{n+\frac{1}{2}} T_p^{(s)n+1} = -q_p^{(f)n+\frac{1}{2}} + \alpha_f^{n+\frac{1}{2}} T_p^{(f)n+\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (1.4)$$

$$(1.5)$$

L'étude de stabilité a montré que la méthode de Fourier-Fourier pouvait avoir un rôle stabilisateur dans les cas où la méthode de Dirichlet-Fourier était instable, c'est-à-dire quand α_f était trop faible. Vérifions ce résultat en reprenant le calcul laminaire précédent en le rendant instable par la méthode de Dirichlet-Fourier. Pour ce faire, nous allons d'une part diminuer la conductivité du matériau de sorte qu'elle soit plus proche de la conductivité du fluide et

d'autre part, nous allons volontairement considérer un coefficient très faible, $\alpha_f = \frac{\alpha_f^{(sup)}}{200}$ par exemple. En effet, on a vu au paragraphe I.1.2.3 qu'une conductivité faible associée à un coefficient de couplage faible rendait le processus itératif instable. Quant au coefficient de couplage α_s côté structure, nous rappelons qu'il s'écrit comme la condensation locale de la matrice de conductivité :

$$\alpha_s = (K_{pp} - K_{pi} K_{ii}^{-1} K_{ip}) \quad (1.6)$$

α_s est directement proportionnelle à la conductivité k_s (FIG. 1.9). Les résultats sont présentés sur les figures 1.10 et 1.11 et donnent les évolutions de la température et du nombre de Nusselt en différents points de la paroi au cours du calcul et pour chaque méthode de couplage. On constate clairement que les conditions de raccord de Dirichlet-Fourier rendent complètement instable le calcul qui diverge au bout du troisième couplage. En revanche, en introduisant le

deuxième coefficient α_s , le calcul converge vers la solution désirée. Ainsi, le coefficient α_s , bien que peu ou jamais mis en évidence dans la littérature peut être très utile dans des situations extrêmes.

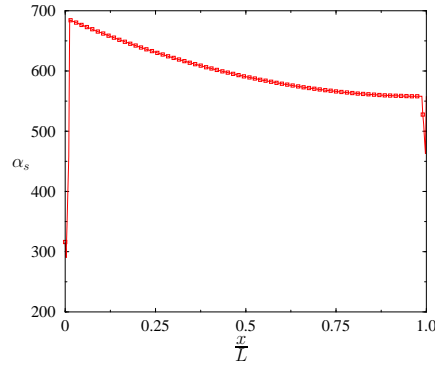


FIG. 1.9 – Evolution du coefficient α_s le long de la paroi

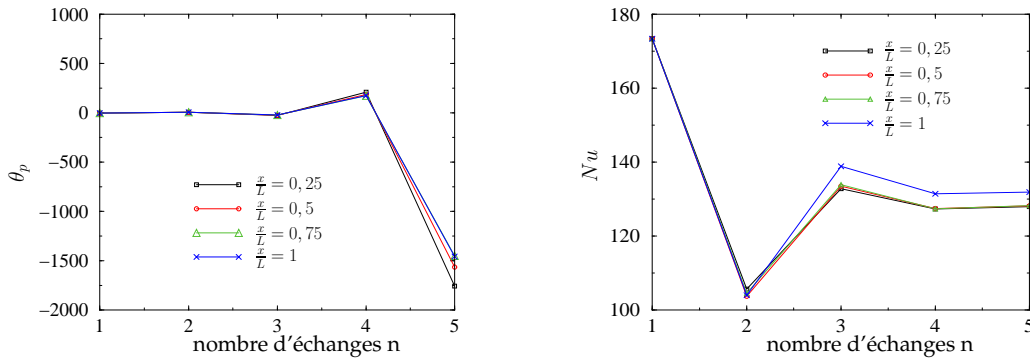


FIG. 1.10 – Divergence de la méthode de Dirichlet-Fourier ($k_s = 0,1 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$)

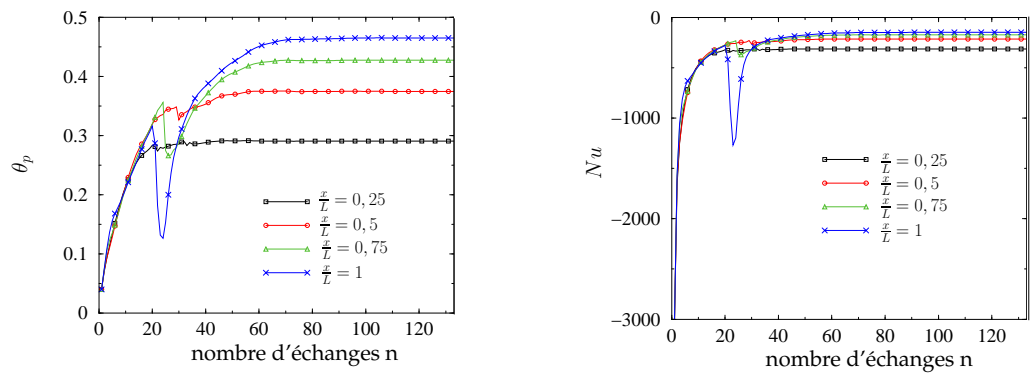


FIG. 1.11 – Convergence de la méthode de Fourier-Fourier ($k_s = 0,1 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$)

1.1.2 Validation avec une solution analytique

Nous allons maintenant comparer les résultats obtenus par le calcul à une solution analytique. Dans la plupart des études théoriques [43] [56] où l'épaisseur de la plaque est prise en compte, on définit un nombre sans dimension : le nombre de Brun. Ce nombre, fonction des conductivités thermiques des milieux fluide et solide ainsi que les caractéristiques de l'écoulement (nombres de Prandtl et de Reynolds), caractérise l'intensité du couplage et a été utilisé pour la première fois par Luikov[43] qui a étudié le cas de la convection laminaire forcée sur une plaque plane dans lequel l'écoulement est supposé incompressible, permanent et sans gradient de pression. La plaque d'épaisseur b et de conductivité k_s est soumise sur sa face arrière à une température constante T_0 (FIG. 1.12). Il introduit également l'hypothèse que la conduction dans la plaque est unidirectionnelle et perpendiculaire à la paroi de sorte que l'équation de la chaleur se réduit à $\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$. Dans ce cas, la densité de flux locale s'écrit :

$$q_p(x) = -k_s \frac{T(x, 0) - T_0}{b} \quad (1.7)$$

On en déduit la relation d'égalité des flux à la paroi :

$$q_p(x) = -k_s \frac{T(x, 0) - T_0}{b} = -k_f \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0}, \quad (1.8)$$

qui exprime le couplage conduction-convection. Luikov a abordé le problème par des méthodes de résolution approchées. Il montre que le coefficient de convection est plus important quand la conduction dans la plaque est prise en compte. Ce résultat surprenant pourrait être imputé aux approximations faites dans la recherche de la solution. Gosse[33] a repris le problème posé par Luikov et a proposé une solution analytique plus complète. Nous allons nous baser sur ce modèle pour valider nos calculs.

Modèle théorique

Le modèle simplifié de Luikov se résume à la résolution des équations de la couche limite incompressible côté fluide et à l'équation de la chaleur semi-monodimensionnelle côté solide :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (1.9)$$

$$u \frac{\partial T_f}{\partial x} + v \frac{\partial T_f}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T_f}{\partial y^2} \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial^2 T_s(x, y)}{\partial y^2} = 0 \quad (1.11)$$

Le détail des calculs étant donné en annexe A, nous ne rappelons ici que les principaux résultats. La description dynamique du problème correspond à la solution de Blasius[4] basée sur l'hypothèse de similitude : $u(x, y) \equiv u(x, \eta) = U_\infty f'(\eta)$. L'équation (1.9) se transforme en une équation différentielle :

$$f f' + 2f'' = 0, \quad (1.12)$$

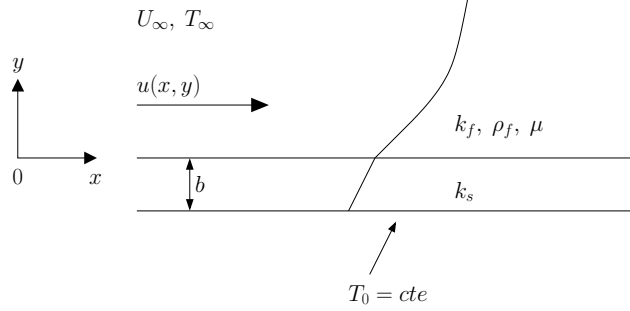


FIG. 1.12 – Géométrie du problème

avec les conditions aux limites : $f(0) = f'(0) = 0$ et $f'(\infty) = 1$. On trouvera dans [55] la table numérique de la fonction $f(\eta)$ et de ses premières dérivées.

Le problème thermique (1.10) est résolu en respectant d'une part la condition de couplage (1.8) en $y = 0$ et d'autre part la condition $T = T_\infty$ quand $y \rightarrow \infty$. En outre, on considère la température réduite $\theta = \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty}$ et on admet l'hypothèse de similitude en posant $\theta(x, y) = \theta(x, \eta)$. La condition (1.8) prend alors la forme :

$$\theta(x, 0) = 1 + \frac{k_f}{k_s} b \left(\frac{\nu x}{U_\infty} \right)^{-\frac{1}{2}} \theta'_\eta(x, 0) \quad (1.13)$$

Cette équation suggère une solution de la forme $\theta(x, \eta) = \theta_0(\eta) + \varphi(x)\theta_1(\eta)$. En remplaçant cette expression dans l'équation (1.10) et tenant compte du fait que les variables θ_0 et θ_1 sont indépendantes, on a les deux équations :

$$\theta_0'' + \frac{1}{2} Pr \theta_0' = 0 \quad (1.14)$$

$$\theta_1'' + Pr \left(\frac{f}{2} \theta_1' - x \frac{\varphi'}{\varphi} f' \theta_1 \right) = 0 \quad (1.15)$$

La solution de l'équation (1.14) est celle de Pohlhausen[51] :

$$\theta_0(\eta) = A \int_\eta^\infty \left[(f''(\eta))^{Pr} \right] d\eta, \quad A = \left[\int_0^\infty [f''(\eta)]^{Pr} d\eta \right]^{-1} \quad (1.16)$$

La solution de l'équation (1.15) est de la forme :

$$\theta_1(\eta) = \left[K \int_\eta^\infty e^{\left(\frac{1}{2} Pr \int_0^\eta f d\eta\right)} d\eta + C \right] e^{\left(-\frac{1}{2} Pr \int_0^\eta f d\eta\right)} \quad (1.17)$$

Les constantes d'intégration K et C sont déterminées par les conditions aux limites.

Finalement, la solution complète recherchée s'écrit, pour $0,6 < Pr < 15$:

$$\theta(x, \eta) = \theta_0(\eta) - 0,332 Br_x e^{(-\frac{1}{2} Pr \int_0^\eta f d\eta)} \quad (1.18)$$

Intervient ici le nombre de Brun caractéristique du couplage, dont la définition est donnée par Luikov :

$$Br_x = \frac{k_f b}{k_s x} Pr^{\frac{1}{3}} \sqrt{Re_x} \quad (1.19)$$

On déduit alors de l'équation (1.18) la température à la paroi :

$$\theta(x, 0) = 1 - 0.332 Br_x \quad (1.20)$$

La température étant strictement positive, cette solution n'est valable que pour les nombres de Brun tels que $Br_x < \frac{1}{0,332}$. De plus, il faut exclure le point $x = 0$ qui est singulier.

Comparaison modèle analytique/ modèle numérique

La figure 1.13 donne les profils de température le long de la paroi avec le modèle analytique et le modèle numérique, et pour différentes conductivités de la structure.

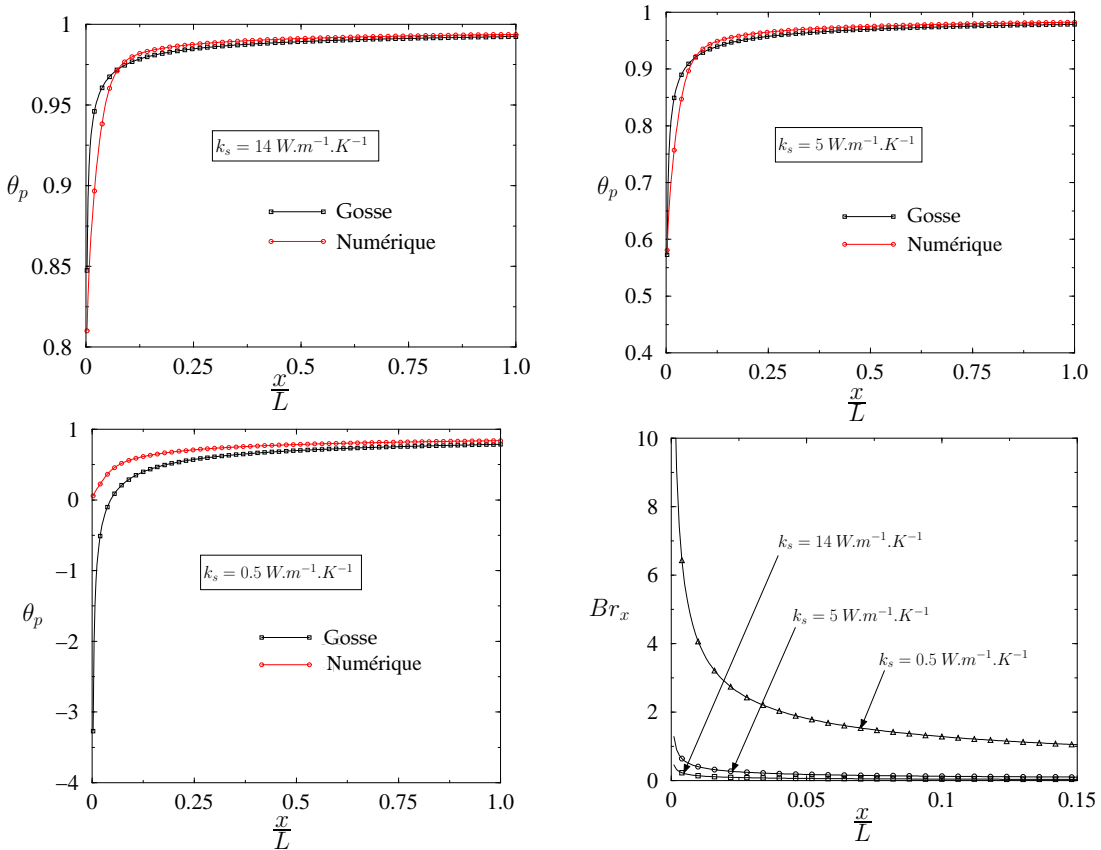


FIG. 1.13 – Comparaison des profils de température et nombre de Brun

Les résultats obtenus par le calcul sont assez proches de la solution théorique à condition toutefois que l'on soit dans le domaine de validité du modèle, à savoir $Br_x < 3$. Pour $k_s = 0,5 \text{ W.m}^{-1}.K^{-1}$, on sort de ce domaine de validité pour $\frac{x}{L} < 0,05$ et la température théorique est négative.

1.1.3 Comparaison système couplé/système non couplé

Il serait maintenant intéressant d'étudier l'influence du couplage en faisant une comparaison avec le cas non-couplé, c'est-à-dire un écoulement sur une plaque d'épaisseur nulle. Pour cela, reprenons le cas de la figure 1.1. Dans cette configuration, on n'a d'autre choix que d'imposer directement la température T_0 au niveau de la paroi, c'est-à-dire en $y = 0$. Les résultats sont présentés sur la figure FIG. 1.14.

On voit que le flux thermique à la paroi tend vers celui du cas non-couplé pour les matériaux conducteurs car les interactions thermiques avec le fluide sont faibles. On peut alors faire l'hypothèse que la totalité du flux thermique est captée par le fluide et donc négliger les pertes par conduction dans la plaque. En revanche, pour les matériaux plus isolants, le couplage a une réelle influence sur les échanges thermiques et ceux-ci sont alors largement surestimés par le calcul non couplé si l'on en croit les profils de température. Dans ce cas, la prise en compte du couplage est obligatoire pour décrire correctement les échanges de chaleur à la paroi.

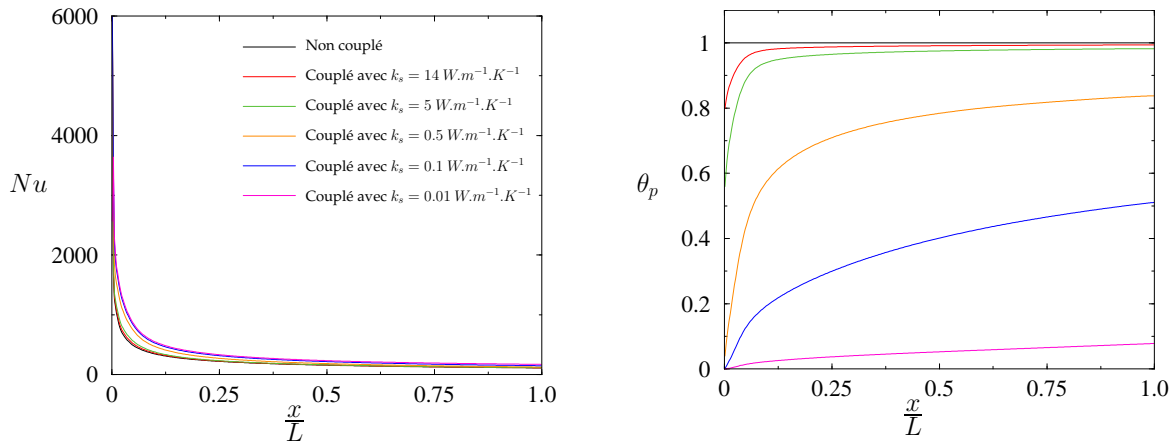


FIG. 1.14 – Profils de flux et température le long de l'interface de couplage

De façon plus générale, l'influence du couplage avec la plaque dépend du nombre de Biot défini par $Bi = \frac{hL}{k_s}$. Ce nombre compare les échanges par convection sur l'interface fluide-solide à la conduction dans la plaque. Globalement, plus Bi est grand, plus l'influence du couplage est importante.

1.2 Ecoulement autour d'une aube

Le deuxième cas de validation est un peu plus complexe et décrit le refroidissement d'une aube de turbine haute pression. Ce calcul est basé sur des mesures aérothermiques effectuées

sur un banc d'essai de la NASA et fait l'objet d'un rapport très détaillé[38]. Le couplage entre la conduction dans l'aube et la convection dans les gaz chauds va nous permettre d'évaluer l'efficacité de ce refroidissement à l'état stationnaire et l'état thermique de la structure. Notre objectif est de quantifier les échanges thermiques au niveau de l'aube et de les comparer aux mesures de température expérimentales.

1.2.1 Description du problème

Le système étudié est un écoulement d'air autour d'une aube de turbine haute pression. Les mesures ont été faites sur une grille constituée de trois aubes de type C3X dont l'une est représentée sur la figure 1.15. Chaque aube est constituée de canaux de refroidissement plus ou moins grands.

Du point de vue numérique, nous allons effectuer un calcul couplé entre la conduction dans l'aube et un écoulement Navier-Stokes dans lequel la turbulence est décrite par le modèle à deux équations de transport $k - \mathcal{L}$ bas Reynolds de MSD décrit au chapitre I.1.

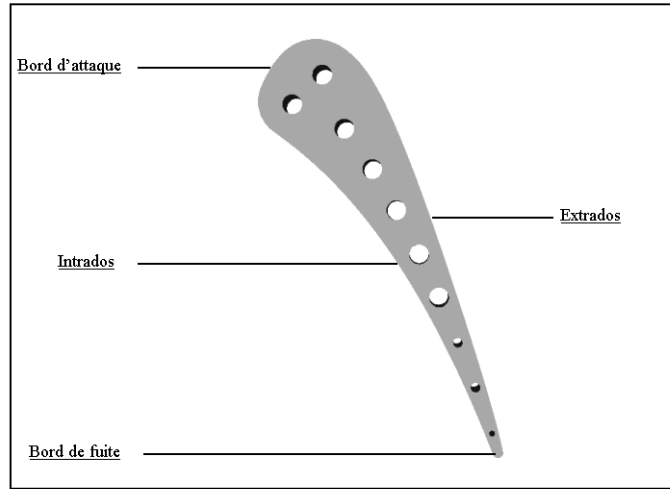


FIG. 1.15 – Géométrie de l'aube

La méthode de couplage utilisée est basée sur les conditions de raccord Dirichlet-Fourier : on impose la température au niveau du fluide et une relation linéaire flux-température au niveau de la structure, soit :

$$\begin{cases} T_p^{(f)n+\frac{1}{2}} = T_p^{(s)n} \\ q_p^{(s)n+1} + \alpha_f^{n+\frac{1}{2}} T_p^{(s)n+1} = -q_p^{(f)n+\frac{1}{2}} + \alpha_f^{n+\frac{1}{2}} T_p^{(f)n+\frac{1}{2}} \end{cases}$$

Nous allons suivre la même démarche que Heslhaus[36][37] qui a étudié le problème en considérant comme coefficient de couplage $\alpha_f = \alpha_f^{(sup)}$. Les maillages des domaines fluide et solide sont présentés sur la figure 1.16 et sont respectivement structurés et non-structurés.

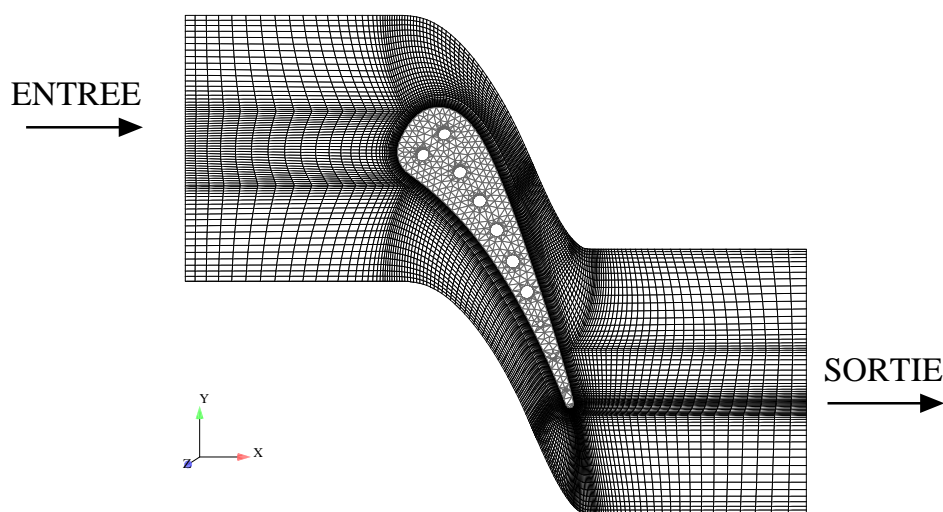


FIG. 1.16 – Maillages des domaines fluide et solide

Caractéristiques de l'aube

Le tableau ci-dessous donne en mètres le diamètre de chaque canal, la longueur de la corde (droite qui relie le bord d'attaque et le bord de fuite) et de la corde axiale (projection verticale de la corde).

canal 1	canal 2	canal 3	canal 4	canal 5	canal 6
$6,3 \cdot 10^{-3}$	$6,3 \cdot 10^{-3}$	$6,3 \cdot 10^{-3}$	$6,3 \cdot 10^{-3}$	$6,3 \cdot 10^{-3}$	$6,3 \cdot 10^{-3}$

canal 7	canal 8	canal 9	canal 10	corde	corde axiale
$6,3 \cdot 10^{-3}$	$3,1 \cdot 10^{-3}$	$3,1 \cdot 10^{-3}$	$1,98 \cdot 10^{-3}$	0,14493	0,007816

Le matériau utilisé est de l'acier désigné sous l'appellation ASTM310 de la norme américaine. L'acier le plus proche en termes de caractéristiques thermiques en norme française est l'acier Z12CNS25. On donne ci-dessous sa conductivité thermique en fonction de la température :

conductivité thermique k_s ($W.m^{-1}.K^{-1}$)	température (K)
13,8	366
15,2	477
16,9	588
18,3	699
20,7	810
22,5	922
24,6	1033
27,7	1144
29,4	1255
32,4	1366

Conditions aux limites

Dans le fluide

- entrée : les conditions aux limites appliquées à l'entrée correspondent au point de fonctionnement du système.

Température	808 K
Pression	2,4353 bar
Taux de turbulence	0,083

Ces conditions correspondent à un nombre de Mach de 0,17 et un Reynolds de $3,8 \cdot 10^5$.

- sortie : pression statique : 1,44 bar
Cette condition de pression de sortie correspond à un Reynolds de $1,47 \cdot 10^6$.

Dans le solide

- dans les canaux : les mesures expérimentales permettent de déterminer le débit dans chaque canal, les pressions statiques et les températures à l'amont et à l'aval. En considérant un comportement linéaire de la température dans chaque canal, une température de référence T^{ref} est calculée en prenant la moyenne le long de l'axe de symétrie. A partir de T^{ref} et du Reynolds (calculé à l'aide du débit et de $\mu(T_{ref})$), le coefficient d'échange convectif h associé est obtenu à partir d'une corrélation fournissant le nombre de Nusselt basé sur le diamètre du canal :

$$NU_D = \frac{hD}{k_s(T^{ref})} = C_r(0,022Pr^{0,5}Re_D^{0,8}) \quad (1.21)$$

C_r est un coefficient de corrélation déterminé par l'expérience.

A partir de cette corrélation, connaissant les débits et les températures de référence, on détermine les coefficients d'échange h pour chaque canal :

canal	T^*	$h (W.m^{-2}.K^{-1})$
1	358,14	1409
2	359,37	1458
3	349,97	1549
4	351,51	1392
5	342,56	1456
6	371,85	1403
7	351,85	1365
8	385,96	1974
9	413,22	1388
10	454,87	1742

1.2.2 Validation du calcul couplé

Nous avons représenté sur la figure 1.17 d'une part le profil de température de paroi expérimental donné dans [38] et d'autre part le profil déterminé par le calcul couplé. s est l'abscisse curviligne autour de l'aube : $s \in [-1, 0[$ correspond à l'intrados et $s \in [0, 1]$ à l'extrados.

On remarque d'entrée que les échanges thermiques sont globalement surestimés par le calcul. Cependant, les profils sont assez similaires pour l'intrados et pour la partie basse de l'extrados ($s \geq 0,3$). En revanche, pour le bord d'attaque ($0 \leq s \leq 0,3$), les résultats obtenus par le calcul sont différents. En effet, cette partie correspond à une zone de forte accélération (FIG. 1.20) et pour laquelle le gradient de pression négatif a tendance à maintenir localement l'écoulement laminaire. Ceci entraîne tout naturellement une baisse des échanges thermiques, ce qui explique la chute de température autour de $s = 0,3$ sur la courbe expérimentale. Celle-ci remonte alors brusquement, marquant la transition vers un écoulement pleinement turbulent. Or, à cause du modèle $k - \mathcal{L}$ de MSD, cette transition n'a pas lieu et l'écoulement est turbulent dès le bord d'attaque en raison de la production d'énergie cinétique de turbulence à cet endroit (FIG. 1.19). Pour cette raison, la chute de température en $s = 0,3$ n'apparaît pas sur le profil calculé et les échanges thermiques sont largement surestimés sur la zone $0 \leq s \leq 0,3$.

Malgré les limites du modèle de turbulence, le couplage nous permet de visualiser l'état thermique de la structure et l'efficacité des canaux de refroidissement, comme le montrent les figures 1.18(a) et 1.21. On observe en effet une diminution importante de la température de l'aube par rapport à la température d'entrée du gaz. Cette diminution est plus importante autour des canaux et au niveau du bord de fuite. Pour ce dernier, le refroidissement est dû à la forte turbulence locale que l'on peut observer sur la figure 1.19.

En définitive, on peut dire que le calcul couplé restitue globalement le comportement thermique du système par rapport aux mesures expérimentales bien que surrestimant les échanges à cause du modèle de $k - \mathcal{L}$ du code MSD. Le couplage présente donc un intérêt majeur à condition de décrire avec plus de précision la turbulence côté fluide.

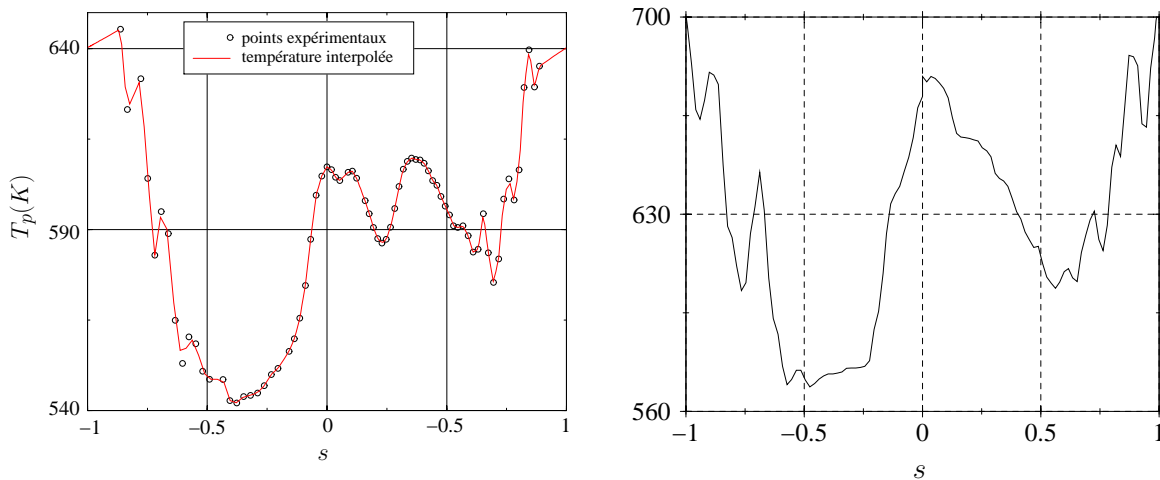
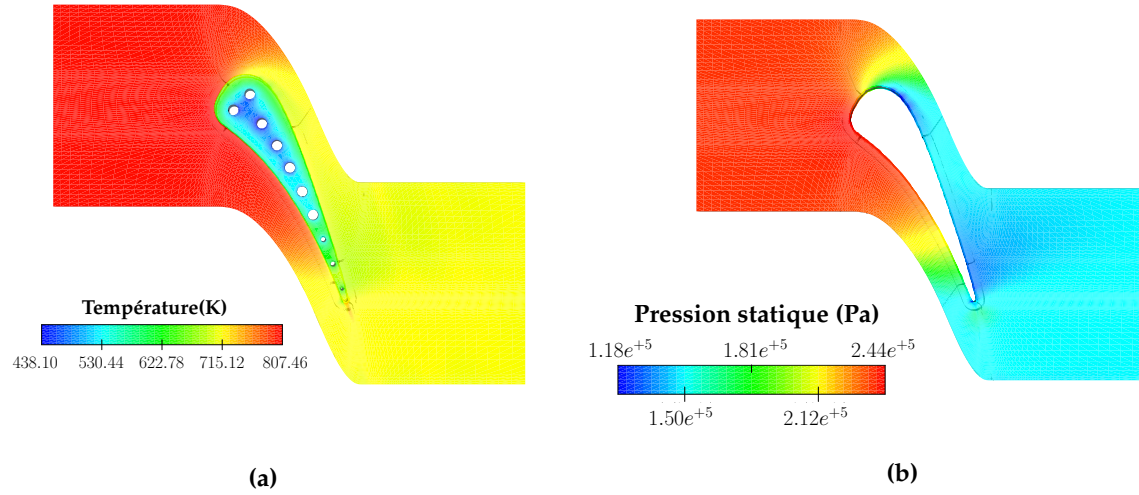
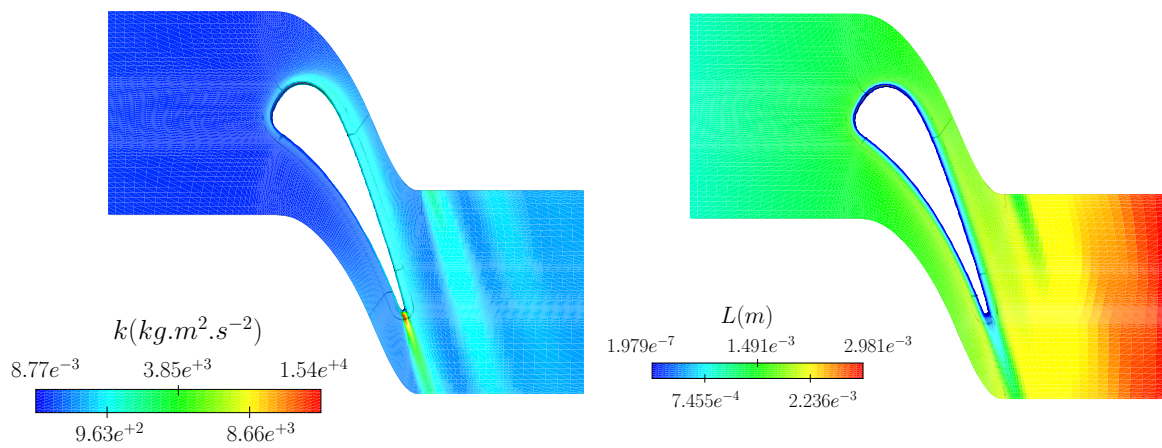


FIG. 1.17 – Profils expérimental (à g.) et calculé (à d.)

FIG. 1.18 – *Champs de température et de pression*FIG. 1.19 – *Champs d'énergie cinétique turbulente et longueur de mélange*

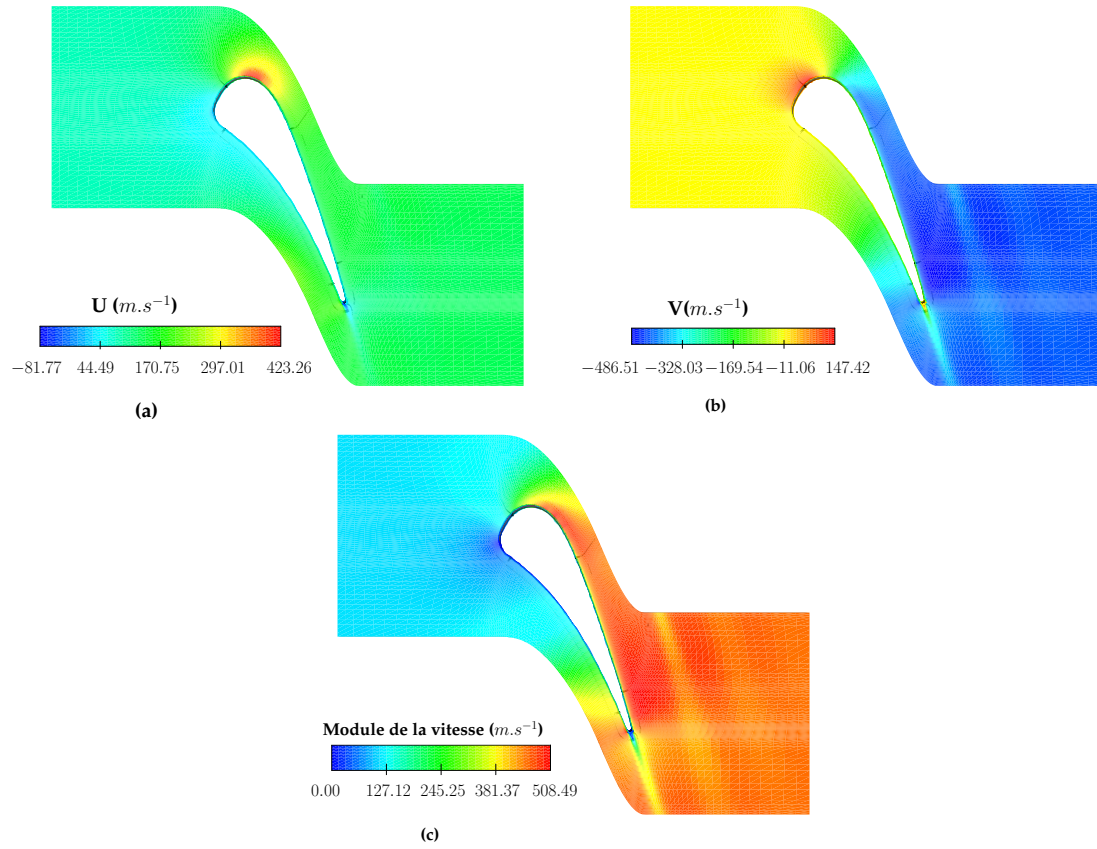


FIG. 1.20 – (a) Composante de la vitesse selon x (b) Composante de la vitesse selon y (c) Module de la vitesse

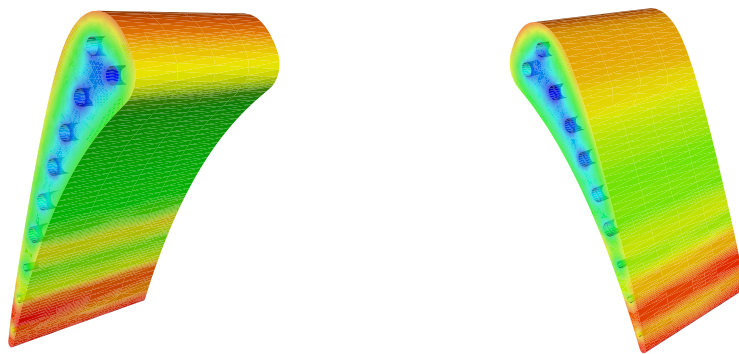


FIG. 1.21 – Champs de température de l'aube sur l'intrados et l'extrados

Chapitre 2

Refroidissement de paroi multiperforée

Parmi les applications où la prise en compte du couplage fluide-structure est nécessaire, on peut citer les phénomènes de refroidissement de paroi poreuse par effusion, c'est-à-dire par injection de fluide. L'objectif est de déterminer l'état stationnaire thermique de cette paroi et ainsi quantifier l'efficacité locale du refroidissement.

2.1 Introduction

L'effusion est un phénomène qui survient dans un certain nombre de processus physiques et industriels. Il s'agit d'un flux de gaz ou de liquide à travers un matériau poreux ou multiperforé qui débouche en général sur un environnement fluide au repos ou en mouvement (FIG. 2.1). L'effusion peut être un moyen de protection thermique de parois soumises à des écoulements pariétaux à haute température. Dans les chambres de combustion en particulier, la paroi est percée d'un nombre très important de trous permettant à un fluide « frais » de circuler. Cette injection de fluide permet d'augmenter l'efficacité du refroidissement en diminuant de façon spectaculaire le flux thermique au niveau de la paroi. Deux phénomènes physiques sont responsables de ce refroidissement. Le premier est la formation d'un film protecteur au niveau de la face interne de la paroi, celle à refroidir, et qui se traduit par une augmentation de l'épaisseur de la couche limite. Le deuxième facteur correspond aux échanges thermiques par convection au sein même de la paroi perforée. En effet, les interactions entre le fluide « frais » et la paroi sont très importantes et le flux convectif est transféré au solide par conduction (FIG. 2.2).

Dans ce type de problème, la connaissance et la modélisation des transferts de masse et de chaleur à travers le matériau multiperforé et dans la couche limite pariétale sont d'une grande importance dans l'interprétation du phénomène.

Les écoulements pariétaux avec injection de fluide ont fait l'objet de nombreux travaux et notamment expérimentaux comme ceux de Goldstein, Eriksen et Eckert[31][32][20] qui ont étudié le refroidissement d'une paroi perforée d'un unique trou circulaire ou d'une rangée de trous. Ils se sont essentiellement intéressés au coefficient d'échange pariétal et à l'efficacité du refroidissement en fonction de divers paramètres géométriques et aérodynamiques comme l'angle d'inclinaison des trous, le diamètre, l'espacement entre les trous en encore le taux d'injection qui est le rapport entre le débit du fluide de refroidissement et celui de l'écoulement principal.

Du point de vue théorique et numérique, on notera les travaux de Campolina[8][7] et Eckert et Cho[19] qui ont étudié le problème couplé fluide-structure. L'écoulement principal y est décrit par un modèle $k - \epsilon$ bas Reynolds et les transferts de chaleur au sein de la paroi sont caractérisés par une conductivité équivalente fonction de la porosité et des conductivités des milieux fluide et solide. Cependant, ces études ne permettent pas de mettre en évidence les transferts au sein de la paroi qui sont, comme nous l'avons déjà dit, déterminants dans l'efficacité du refroidissement.

Dans le cadre du couplage fluide-structure tel que nous l'avons décrit dans les chapitres précédents, nous optons donc pour une approche plus générale. En effet, nous allons modéliser non seulement les écoulements principal et secondaire mais également les transferts convection-conduction entre le fluide de refroidissement et la paroi à l'intérieur des trous. De cette façon, nous aurons accès à la structure de l'écoulement interne et nous aurons une meilleure évaluation de la réponse en température de la paroi et de la réelle efficacité du refroidissement local η qui compare la température de paroi T_P aux températures des gaz chauds et de l'air de refroidissement, respectivement T_C et T_F :

$$\eta = \frac{T_F - T_P}{T_C - T_F} \quad (2.1)$$

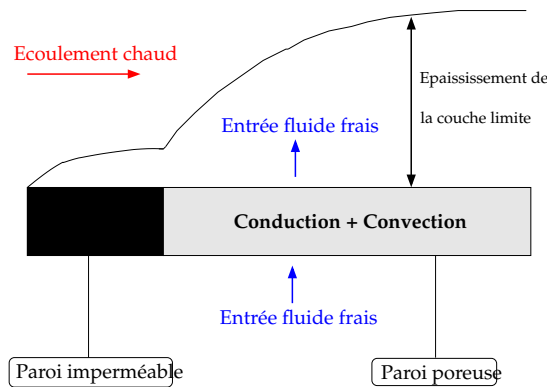


FIG. 2.1 – Schéma de principe de l'effusion

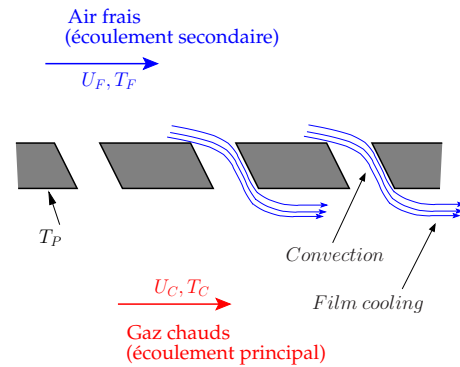


FIG. 2.2 – Paroi multiperforée

L'efficacité est proche de 1 lorsque la température de paroi T_P est proche de celle de l'air frais T_F . Ce paramètre est le principal critère permettant de quantifier le refroidissement. En outre, η dépend principalement de deux phénomènes physiques : la pénétration des jets transverses et l'homogénéisation du film de refroidissement. En effet, plus le taux d'injection des jets est important moins le refroidissement est efficace en raison du risque de décollement au niveau de la paroi côté gaz chauds. De la même façon, il est clair que l'homogénéité du film protecteur favorise les échanges thermiques et empêche la formation de points chauds sur la paroi. C'est pourquoi il est nécessaire de contrôler certains paramètres d'origine géométrique d'une part et aérodynamique d'autre part.

2.1.1 Paramètres géométriques

La géométrie de la plaque perforée joue un rôle prépondérant sur la qualité du refroidissement. En particulier, la régulation du débit d'air frais est une priorité. Il doit en effet être assez important pour favoriser les transferts par convection dans le matériau. Cependant, un débit trop élevé risquerait d'engendrer des décollements en sortie des perforations et de détériorer ainsi le film protecteur.

Les principaux paramètres géométriques qui permettent de réguler ce débit sont :

- Le diamètre des trous : il ne doit pas être trop faible pour ne pas limiter les transferts convectifs. Toutefois, un diamètre trop important risquerait de fragiliser le matériau. Notons que les trous sont supposés de forme cylindrique, ce qui n'est pas le cas dans un contexte industriel où l'on privilégie les modes de perçage qui donnent une forme plus évasée en sortie pour une plus grande répartition latérale des jets.
- L'angle d'injection : on considère l'angle d'inclinaison des trous avec la paroi longitudinalement. On le note θ . Si les trous sont percés perpendiculairement à la paroi, les jets pénètrent fortement dans l'écoulement principal : il sont mélangés aux gaz chauds et ne participent pas à la formation du film. Dans le cas de perforations inclinées, la pénétration est plus faible. En général, on choisit $30^\circ \leq \theta \leq 45^\circ$.
- Espacement des trous : on définit également des distances caractéristiques normalisées par le diamètre d , à savoir la distance entre deux rangées que l'on note $\frac{x}{d}$ et l'espacement entre deux trous d'une même rangée $\frac{z}{d}$. Il est évident que le refroidissement est plus efficace quand ces deux paramètres diminuent : l'homogénéité et a fortiori l'efficacité du film de refroidissement seront d'autant plus importantes que les trous seront nombreux. La variation de η en fonction du nombre de trous est traitée par Goldstein[31].
- Disposition des trous : en rangées rectilignes ou en quinconce. L'arrangement en quinconce permet une meilleure homogénéisation du film et est privilégiée en pratique.

2.1.2 Paramètres aérodynamiques

Les paramètres aérodynamiques sont étudiés pour une configuration donnée. Les plus caractéristiques sont :

- le rapport des vitesses d'injection $\left| \frac{U_F}{U_C} \right|$.
- le taux de soufflage $\tau = \frac{\rho_F |U_F|}{\rho_C |U_C|}$.
- le rapport des débits de quantités de mouvement $I = \frac{\rho_F |U_F|^2}{\rho_C |U_C|^2}$.

Des études sur des configurations comportant un petit nombre de trous et sur une portion de paroi limitée ont été faites pour étudier l'influence du taux de soufflage sur l'efficacité. Goldstein[32] a montré que cette efficacité était maximale pour $\tau^{max} = 0,5$ avec 7 rangées de

trous et $\theta = 30^\circ$. Mayle et Camarata[45] ont trouvé $\tau^{max} = 1,5$ pour 15 rangés de trous et $\theta = 35^\circ$. Dans tous les cas, plus le nombre de rangées est important, plus le taux de soufflage doit être grand.

2.2 Modélisation

Dans ce chapitre, nous allons étudier le refroidissement d'une paroi perforée de trous de forme cylindrique. Cette configuration n'est pas sans rappeler celle d'une paroi de chambre de combustion à la différence que cette dernière est percée d'un nombre très important de trous (plusieurs centaines de milliers). Il est clair que la modélisation d'un si grand nombre de perforations est exclue. En revanche la caractérisation des différents phénomènes responsables du refroidissement ne nécessite que l'étude de quelques trous. Cette étude a fait l'objet de plusieurs articles[22][9][23].

2.2.1 Configuration

Nous considérons une plaque d'épaisseur $e = 3 \text{ mm}$, de longueur $L = 25 \text{ mm}$, de largeur $l = 4,4 \text{ mm}$ comportant six rangées de deux trous chacune et ayant les caractéristiques suivantes (FIG. 2.3) :

Paramètres géométriques :

- diamètre des trous : $d = 0,3 \text{ mm}$.
- distance entre les rangées : $\frac{x}{d} = 8$.
- distance entre deux trous d'une même rangée : $\frac{z}{d} = 7$.
- angles d'inclinaison : $\theta = 45^\circ$.

On définit la porosité équivalente de la paroi ϵ en rapportant la surface des N trous à la surface totale :

$$\epsilon = \frac{S_{trous}}{S_{totale}} = \frac{N\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2}{lL} \approx 1\% \quad (2.2)$$

Paramètres aérodynamiques :

Le fluide de refroidissement et celui de l'écoulement principal sont de l'air. La paroi est homogène, de conductivité thermique constante $k_s = 14 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$.

Les vitesses et températures d'entrée sont les suivantes :

- Air chaud : $T_C = 1200 \text{ K}$, $U_C = 370 \text{ m.s}^{-1}$.
- Air de refroidissement : $T_F = 600 \text{ K}$, $U_F = 20 \text{ m.s}^{-1}$.

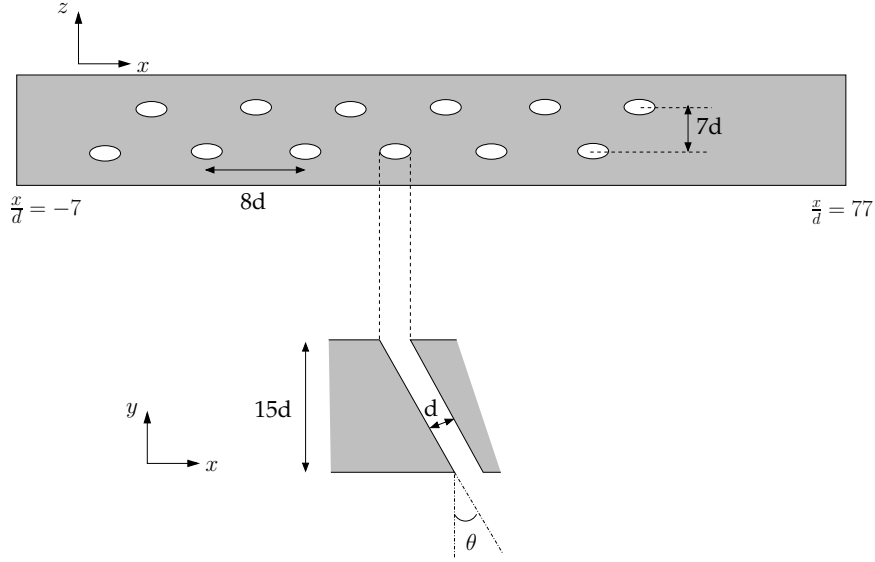
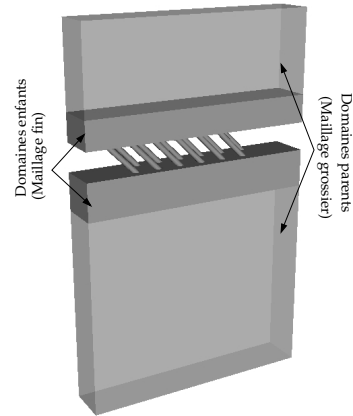


FIG. 2.3 – Paramètres géométriques de la paroi

Pour déterminer un taux de soufflage τ représentatif, on fait la moyenne du débit d'air frais à posteriori dans un canal que l'on divise par le débit d'air chaud loin de la paroi, c'est-à-dire le débit d'entrée. On trouve $\tau = 1, 2$. On fait de même pour le rapport des débits de quantité de mouvement : $I = 0, 5$.

2.2.2 Domaines de calcul

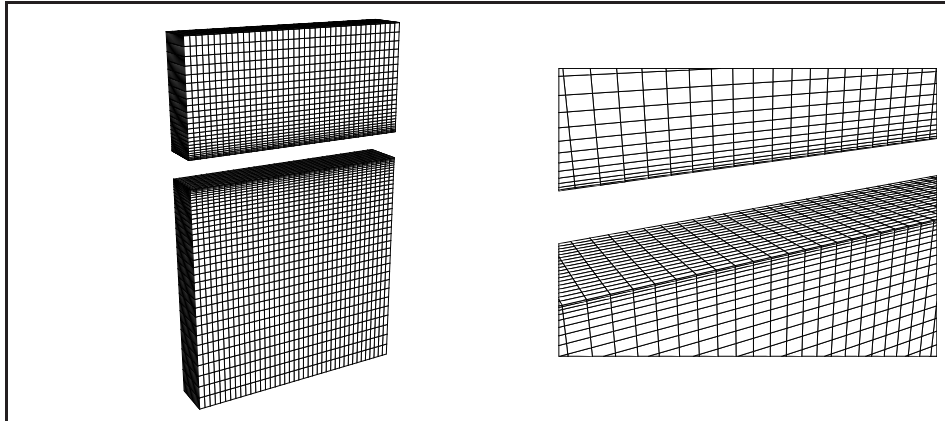
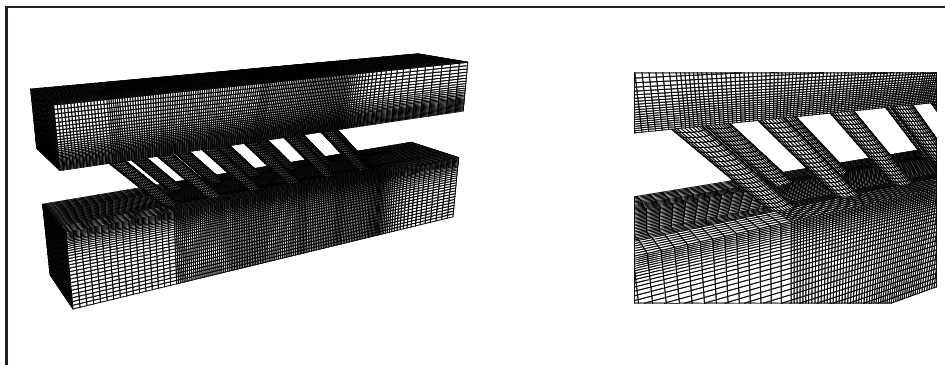
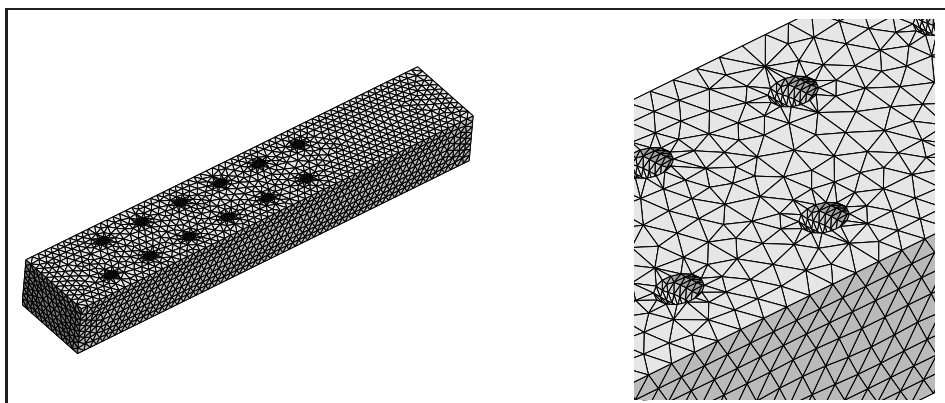
Le maillage côté fluide est constitué de deux parties selon la méthode Chimère du code MSD. En effet, un premier maillage grossier constitue l'ossature du domaine de calcul : c'est le domaine parent (FIG. 2.4). Un deuxième maillage plus fin vient se greffer sur ce maillage principal : c'est le domaine enfant (FIG. 2.5). Le code effectue automatiquement le raccordement entre domaine parent et domaine enfant. La communication entre les deux maillages est double : d'une part les conditions aux limites sont interpolées à partir du maillage parent sur les limites du maillage enfant et d'autre part le maillage parent reçoit les données dans les zones recouvertes du maillage enfant par l'intermédiaire d'un terme correctif dans les équations de conservation :



$$\partial_t q + \vec{\nabla} F(q) = S_q + \alpha_c (\tilde{q} - q) \quad (2.3)$$

Ce terme force la solution q du maillage grossier à approcher la solution \tilde{q} du maillage fin dans les zones de recouvrement. Dans MSD, $\alpha_c = \frac{1}{\tau_c}$ où τ_c est le temps local lié à l'acoustique. La méthode chimère donne la possibilité de modifier aisément certains paramètres géométriques

(angle d'injection, porosité,...) en conservant le maillage principal qui s'ajuste à ces modifications. La figure FIG. 2.6 représente une vue du maillage non structuré mis en œuvre dans le solide. Les douze trous de refroidissement sont mis en évidence.

FIG. 2.4 – *Maillage parent*FIG. 2.5 – *Maillage enfant*FIG. 2.6 – *Maillage solide*

2.2.3 Modèle de turbulence

Dans tout domaine fluide, on résout les équations moyennées présentées au chapitre I.1. On utilise le modèle à deux équations de transport $k - \mathcal{L}$ bas Reynolds de MSD.

$$\begin{aligned}
 \rho \frac{dk}{dt} &= \vec{\nabla} \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \vec{\nabla} k \right] \\
 &\quad + \left(P_k - \rho C_\epsilon f_\epsilon \frac{k^{\frac{3}{2}}}{\mathcal{L}} - \rho D_k \right) \\
 \rho \frac{d\mathcal{L}}{dt} &= \vec{\nabla} \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{\mathcal{L}}} \right) \vec{\nabla} \mathcal{L} \right] \\
 &\quad + \frac{\mu}{\mathcal{L}} \left(\kappa^2 - (\vec{\nabla} \mathcal{L})^2 \right) + \frac{\mu_t}{\sigma_{\mathcal{L}} \mathcal{L}} \left(\alpha_\kappa \kappa^2 - (\vec{\nabla} \mathcal{L})^2 \right) \\
 &\quad - \alpha_{\mathcal{L}\mathcal{L}} \vec{\nabla} \mathcal{L} \cdot \vec{\nabla} \mathcal{L} + \alpha_{k\mathcal{L}} \vec{\nabla} k \cdot \vec{\nabla} \mathcal{L} + \alpha_{kk} \vec{\nabla} k \cdot \vec{\nabla} k
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Les différents paramètres et fonctions de correction sont donnés au chapitre I.1. Dans la paroi perforée, on résout toujours l'équation de la conduction en régime permanent :

$$\vec{\nabla} \cdot (k_s \vec{\nabla} T) = 0 \tag{2.5}$$

2.3 Résultats

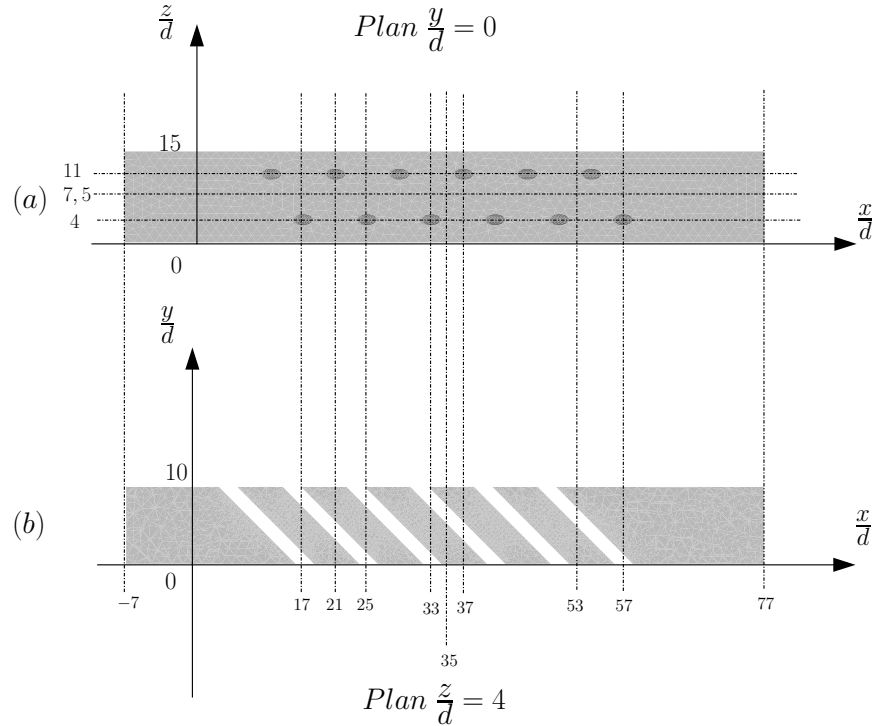


FIG. 2.7 – (a) Plans de coupe $y/d = 0$ (paroi côté air chaud) (b) $z/d = 4$ (axe des trous)

2.3.1 Plan(y,z)

On considère dans un premier temps le plan transversal à l'écoulement. Plus précisément, on s'intéresse à la partie située côté air chaud, c'est-à-dire pour $\frac{y}{d} \leq 0$ (la paroi est située en $\frac{y}{d} = 0$ et coïncide avec la sortie des jets).

La représentation des vecteurs vitesse dans le plan (y,z) pour différentes abscisses $\frac{x}{d}$ (FIG. 2.8) met clairement en évidence des structures caractéristiques de ce type d'écoulement, à savoir, pour chaque trou, une paire de recirculations qui provoque une remontée de l'air chaud au niveau de la paroi.

Nous avons représenté sur la figure 2.9 les profils de vitesse longitudinale U en fonction de $\frac{y}{d}$ dans le plan perpendiculaire à l'écoulement $\frac{x}{d} = 35$ et pour plusieurs valeurs de $\frac{z}{d}$. On constate que l'influence des jets en amont décroît quand on s'éloigne de l'axe des trous situé en $\frac{z}{d} = 4$. Les profils « à deux bosses », témoins de la présence des recirculations, sont en effet de moins en moins marqués : la vitesse est d'autant plus homogène loin de l'axe des trous. Ce sont bien ces derniers qui maintiennent les inhomogénéités spatiales. Les profils de vitesse verticale V sont très différents selon la position $\frac{z}{d}$ par rapport à l'axe des trous (FIG. 2.9). En effet, dans l'axe des trous ($\frac{z}{d} = 4$), la vitesse est strictement négative : l'écoulement descend. Si l'on observe maintenant les positions excentrées où il n'y a pas de trou ($\frac{z}{d} = 6, \frac{z}{d} = 8$ et $\frac{z}{d} = 8,5$), la vitesse est d'abord positive et change de signe à cause des recirculations observées précédemment.

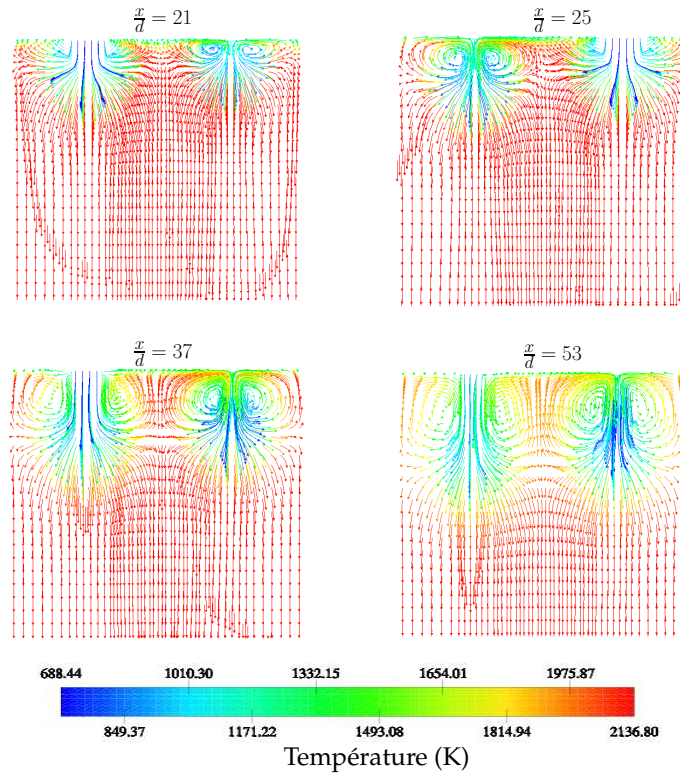


FIG. 2.8 – Vecteurs vitesse dans le plan (y,z) côté air chaud

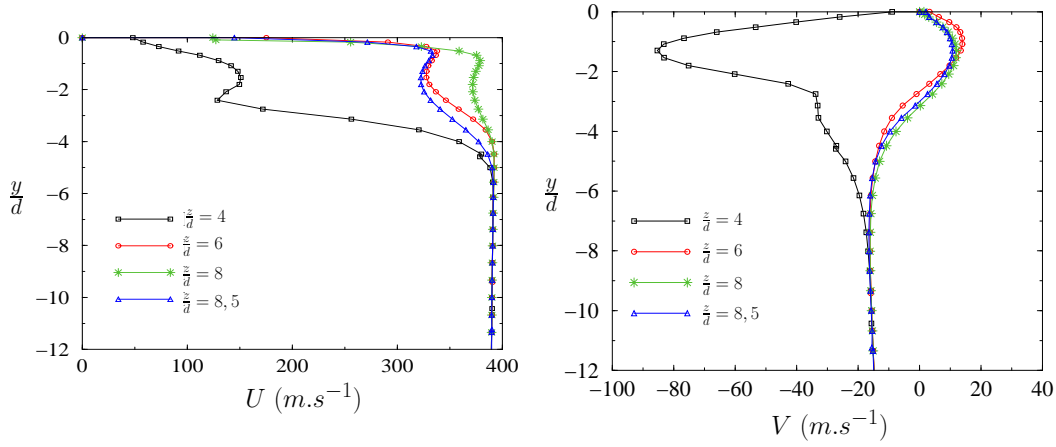


FIG. 2.9 – Profils de vitesse longitudinale et verticale dans le plan (y, z) , en $\frac{x}{d} = 35$

2.3.2 Plan(x,y)

On considère maintenant le plan longitudinal $\frac{z}{d} = 4$ passant par la première rangée de trous (FIG. 2.7 (b)).

La figure 2.10 représente les profils de vitesse longitudinale et vertical en fonction de $\frac{y}{d}$ le long de l'axe $\frac{z}{d} = 4$. Les abscisses $\frac{x}{d} = 17, 33$ et 57 coïncident avec le centre de chaque perforation au niveau de la sortie des jets (voir FIG. 2.7 (b)). La vitesse n'est donc pas nulle au niveau de la paroi située en $\frac{y}{d} = 0$.

Les profils longitudinaux $U\left(\frac{y}{d}\right)$ ont une fois de plus une forme bombée (à « deux bosses ») due à des inhomogénéités caractéristiques de ce type d'écoulement. En sortie des perforations, la vitesse augmente légèrement en proche paroi puis décroît assez rapidement à cause de la présence des jets en amont qui ont été mélangés et diffusés. On retrouve le même comportement dans les zones situées entre les jets ($\frac{x}{d} = 37$).

Les profils de vitesse verticale $V\left(\frac{y}{d}\right)$ ont la même allure en fonction de $\frac{x}{d}$: la vitesse tend vers 0 très loin de la paroi et présente un maximum en valeur absolue dans la zone des jets. Ce maximum est d'autant plus faible que l'on s'éloigne des trous.

On retrouve le même type de comportement sur la température. En effet, la figure 2.12 présente les profils de température côté fluide et côté solide pour plusieurs abscisses $\frac{x}{d}$. Du côté de l'air injecté, on a un profil de couche limite classique au contraire de l'écoulement principal où l'on retrouve un profil « à deux bosses » similaire à celui observé pour la vitesse.

Les champs représentés sur la figure 2.11 mettent en évidence les deux modes de refroidissement possibles, à savoir le « film cooling » et la convection dans les trous. En effet, sur la figure 2.11 (a) où l'on a représenté les champs de température dans les deux milieux à l'état stationnaire, on peut observer en premier lieu la formation d'un film qui vient protéger la paroi de l'écoulement principal incident. Ce film correspond à un épaississement de la couche

limite provoquée par la pénétration des jets. Celle-ci est d'ailleurs plus visible si l'on regarde les fractions massiques de la figure 2.11 (b). Nous avons en effet attribué à chaque écoulement une fraction massique de façon à suivre la pénétration des jets d'air frais dans l'air chaud (la fraction massique de « l'air frais pur » vaut 1 sur la figure).

Les échanges par convection dans les trous sont visibles sur le champ de température où l'on observe un refroidissement plus important au sein du matériau. En outre, si l'on regarde l'énergie cinétique turbulente représentée sur la figure 2.11 (c), on constate la présence de deux zones de forte turbulence. La première zone, située en amont des canaux c'est-à-dire à l'entrée des jets, est due à l'impact de ceux-ci sur la paroi interne des trous. Elle favorise les échanges par convection au sein du matériau et donc augmente l'efficacité du refroidissement. La deuxième zone, située en aval des perforations, est le résultat de l'interaction entre l'écoulement d'air frais et l'écoulement d'air chaud. Cette turbulence participe à l'homogénéisation du film.

En fait, si l'on regarde de plus près les courbes d'efficacité, on se rend compte que le refroidissement par convection dans les trous est plus importante que celui engendré par le « film cooling ». L'efficacité η varie entre 0,72 et 0,78 dans les trous (FIG. 2.14), ce qui est supérieur aux valeurs observées au niveau de la paroi côté air chaud (FIG. 2.13).

On peut donc conclure que le refroidissement de la paroi se fait essentiellement par convection au sein des perforations. Ce phénomène joue un rôle prépondérant par rapport à celui du « film cooling ». Il apparaît donc primordial d'avoir un taux d'injection suffisamment grand pour augmenter les échanges par convection dans les trous. Ces conclusions n'ont a priori rien de général et ne concernent que la configuration étudiée, d'où la nécessité de faire des études paramétriques. On notera également que dans ce type d'écoulement, les phénomènes aérodynamiques sont caractérisés par des structures complexes. Or ces structures sont généralement mal décrites par les modèles de type BVM comme le modèle $k - \mathcal{L}$ employé ici. On sait en particulier que la pénétration des jets est surévaluée par ce type de modèle.

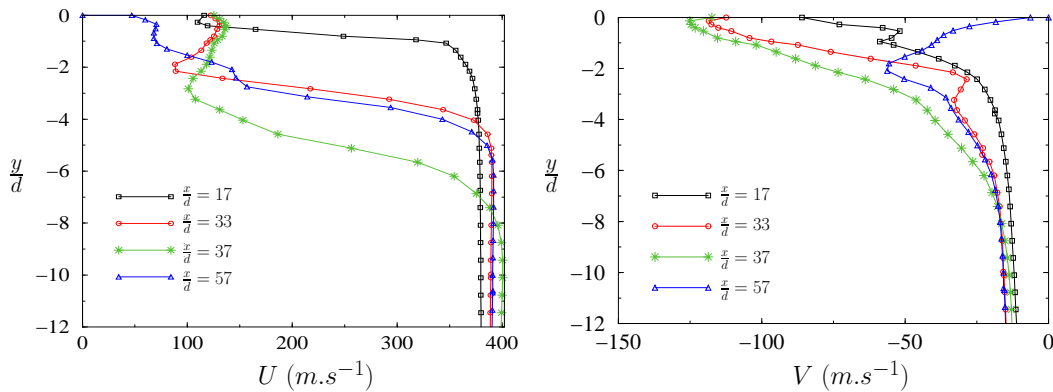


FIG. 2.10 – Profils de vitesse longitudinale et verticale dans le plan (x, y) , en $\frac{z}{d} = 4$

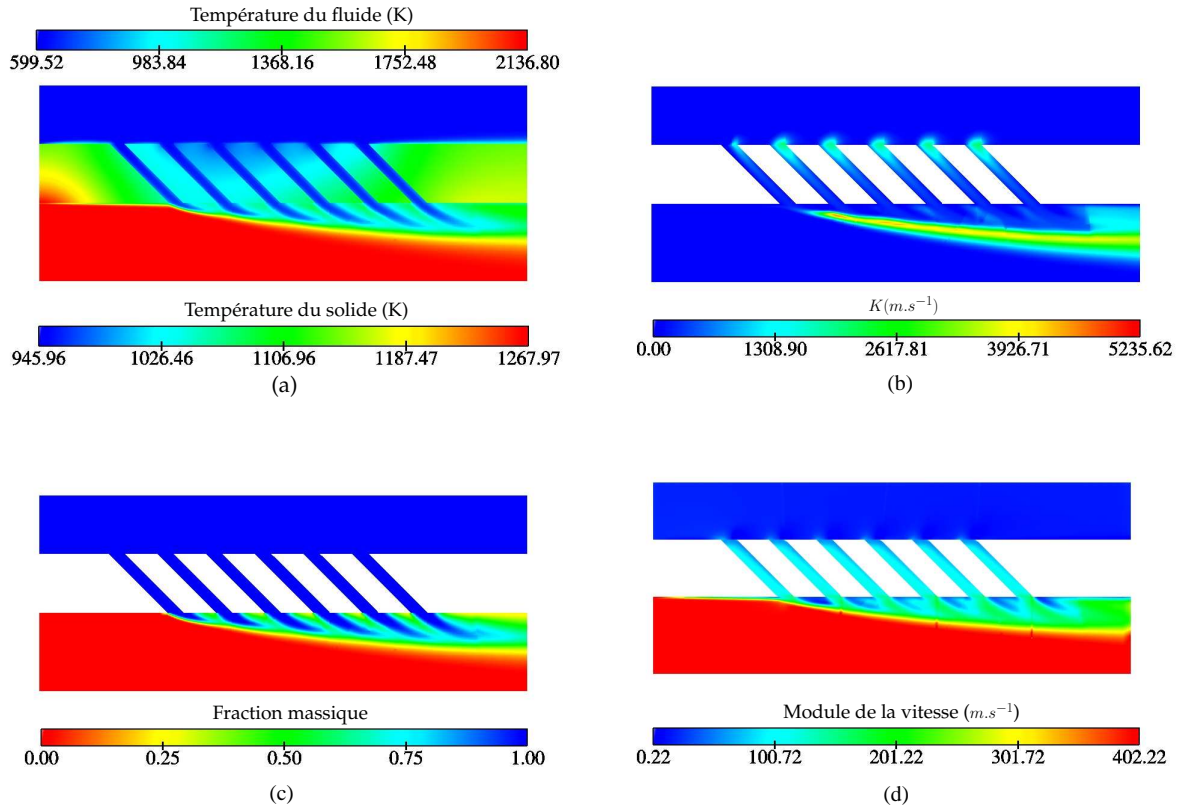


FIG. 2.11 – Mise en évidence des modes de refroidissement dans le plan $\frac{z}{d} = 4$

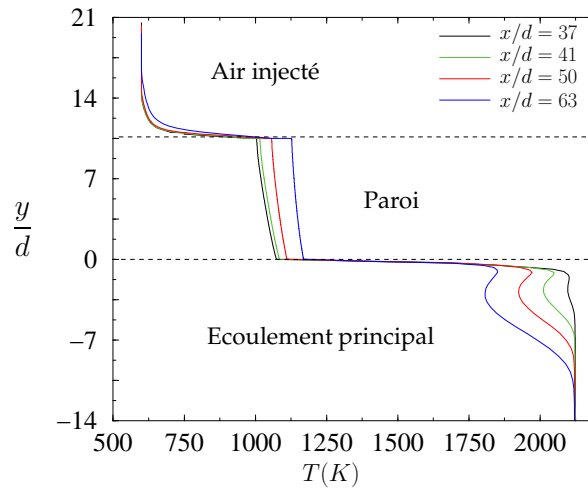


FIG. 2.12 – Profils de température dans le fluide et la paroi

2.3.3 Plan(x,z)

La figure 2.13 représente l'évolution de l'efficacité sur la paroi chaude en fonction de $\frac{x}{d}$ le long d'un axe médiant passant entre les rangées de trous. Nous avons divisé la paroi en

quatre zones. Au niveau de la première zone, la faible efficacité observée est due à l'absence de trous. La paroi est alors en contact direct avec l'écoulement d'air chaud. La deuxième zone est caractérisée par un maximum d'efficacité qui s'explique d'une part par le refroidissement par convection dans les canaux amont et aval et d'autre part au refroidissement par film cooling qui est maximum à cet endroit. En effet, dans cette zone, le film commence à se former et vient lécher la paroi. En revanche, à partir de la troisième zone, le taux d'injection de l'air frais est tel que l'on observe un décollement des jets loin de la paroi et de ce fait, comme nous l'avons décrit précédemment, une remontée de l'air chaud (voir FIG. 2.8). La décroissance de l'efficacité se poursuit dans la quatrième zone à cause de l'absence de perforations. Il n'y a donc pas de convection et le refroidissement n'est assuré que par le film cooling.

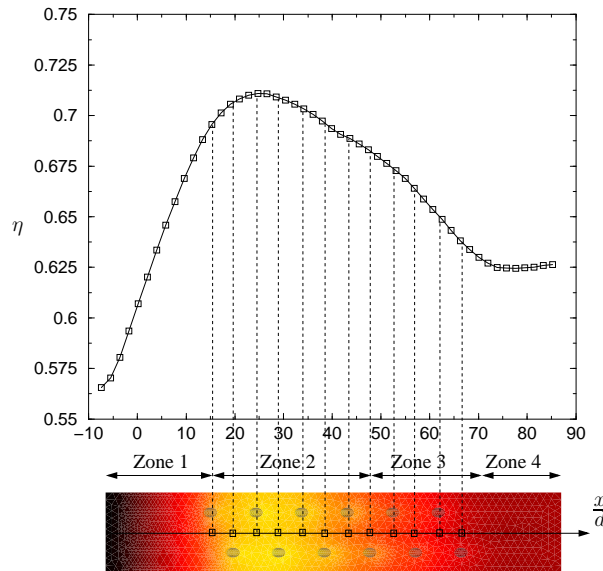


FIG. 2.13 – *Efficacité le long de la paroi côté air chaud en fonction de $\frac{x}{d}$*

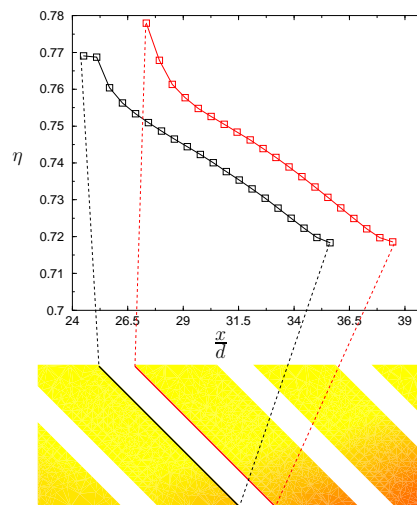


FIG. 2.14 – *Efficacité sur les paroi d'un canal (refroidissement par convection)*

L'algorithme de couplage fluide-solide en régime permanent nous a permis d'étudier la faisabilité d'un problème de refroidissement de paroi multiperforée. Nous avons pu mettre en évidence d'une part la structure particulière de ce type d'écoulement et d'autre part décrire quantitativement les deux modes de refroidissement que sont la convection et le film cooling. Les résultats sur l'efficacité ont cependant montré les limites de la configuration envisagée. En effet, nous avons fait le choix de modéliser un nombre limité de trous parmi les centaines de milliers qui constituent en général une paroi de chambre de combustion. Ce choix nous a obligé à définir des conditions d'entrée-sortie représentatives qui sont difficiles à évaluer. La meilleure façon de procéder serait d'étudier un seul canal de refroidissement avec des conditions aux limites associées. Par ailleurs, la structure particulière et complexe de l'écoulement pose le problème de la validité des modèles de turbulence utilisés. Une approche de type LES voire DNS nous semble assez prometteuse si l'on désire analyser plus finement les champs aérothermiques dans de telles configurations.

Quatrième partie

**Couplage thermique fluide-structure
instationnaire**

Chapitre 1

Introduction

Il existe un grand nombre d'applications dans lesquelles la description thermique instationnaire d'une structure soumise aux sollicitations d'un fluide est un enjeu majeur. Le dimensionnement thermique des propulseurs à propergols solides ou des systèmes propulsifs en général illustre parfaitement cet enjeu en raison des nombreux phénomènes physiques couplés qui interviennent. En effet, ce genre de problème nécessite d'une part la détermination de sollicitations thermiques nombreuses qui évoluent dans le temps (convection, rayonnement, diffusion des espèces vers la paroi, impacts de particules, film d'alumine) et d'autre part la détermination de la réponse thermique instationnaire des matériaux composites exposés à ces sollicitations (échauffement par conduction de la chaleur, dégradation avec génération de gaz de pyrolyse, ablation, érosion). Il existe une forte interaction entre cette réponse thermique et la sollicitation qui en est à l'origine. Nous pouvons citer par exemple les phénomènes de :

- Réduction du flux convectif reçu par la paroi du fait de l'élévation de la température et du soufflage de la couche limite par les gaz issus de la pyrolyse ou de l'ablation du matériau.
- Modification du flux radiatif reçu par la paroi sous l'effet des gradients pariétaux de température et de concentration des particules d'alumine qui sont modifiés par la réponse thermique du matériau.
- Modification du flux diffusif des espèces vers la paroi du fait des changements de composition chimique induite par l'ablation et l'éjection des gaz de pyrolyse.
- etc...

Nous sommes donc confrontés à des couplages complexes et variés qui ont tendance en règle générale à réduire les sollicitations du fluide (flux de chaleur, pression...).

Des études ont d'ailleurs déjà été effectuées par Snecma Propulsion Solide sur des configurations simples de type tuyère (2D axisymétrique) pour des écoulements calculés avec une approche Euler/couche limite. Cependant, le traitement de configurations plus complexes (géométrie 3D) nécessite un couplage plus général, en particulier un couplage de codes.

Nous allons étudier l'un des nombreux couplages fluide-solide énoncés plus haut, à savoir les interactions entre la convection et la conduction en régime transitoire. Notons que le but de cette étude est de déterminer uniquement la réponse instationnaire de la structure aux sollicitations du fluide. Cette précision essentielle va conditionner le choix de la stratégie de couplage.

Il existe différentes approches pour aborder ce genre de problème. Dans la plupart des cas, la principale difficulté quand on veut décrire le régime transitoire du système couplé fluide-structure est la grande disparité des temps caractéristiques des phénomènes physiques mis en jeu. En effet, les temps liés à la convection et la diffusion dans le fluide sont le plus souvent beaucoup plus courts que la conduction dans le solide. Examinons ces temps de plus près :

Pour le fluide :

Soient U et L_f respectivement les vitesse et longueur caractéristiques. On considère que la diffusion est concentrée dans la zone de proche paroi de dimension l . On sait que $l \approx \frac{L_f}{\sqrt{Re}}$.

- Temps de convection : $\tau_f^c = \frac{L_f}{U}$
- Temps de diffusion : $\tau_f^d = \frac{\rho_f C_f l^2}{k_f} = Pr \frac{L_f}{U}$

Pour le solide :

Soit L_s la longueur caractéristique du solide.

- Temps de diffusion : $\tau_s^d = \frac{\rho_s C_s L_s^2}{k_s}$

Si l'on considère les valeurs caractéristiques de l'air et de l'acier par exemple ($k_s = 20 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$, $C_s = 500 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$, $\rho_s = 10^4 \text{ kg.m}^{-3}$) et en supposant que $L_s = L_f$, on obtient :

$$\frac{\tau_s^d}{\tau_f^d} \approx 7Re$$

On en déduit qu'une évolution significative de l'état thermique de la structure correspond à un temps extrêmement long du point de vue du fluide.

Nous avons donc deux échelles de temps différentes, chacune associée à un milieu donné. La caractérisation du couplage passe par la définition d'une échelle de temps commune qui respecte les phénomènes physiques étudiés. Le choix qui s'impose d'emblée est d'utiliser le temps caractéristique du milieu qui évolue le plus rapidement, en l'occurrence le fluide. Ce choix n'est cependant pas sans conséquences. D'une part, le fait d'effectuer des couplages fluide-solide en se basant sur l'évolution des phénomènes aérothermiques, caractérisés par un pas de temps faible, engendre forcément des échanges très fréquents au cours du temps. Du point de vue numérique, la conséquence immédiate est un temps de calcul important. En outre, on peut s'interroger sur la pertinence d'un tel choix et plus précisément sur l'utilité de coupler les deux milieux à des pas temps bien inférieurs au temps caractéristique de la

conduction dans le solide. D'autre part, cette approche suppose que l'on soit capable de définir l'écoulement instationnaire à chaque instant, ce qui n'est pas toujours le cas dans la pratique car très coûteux du point de vue numérique. En outre, on ne s'intéresse qu'à la réponse thermique instationnaire de la structure. Le but est alors de déterminer des conditions aux limites réalistes pour le solide et la description précise du champ aérothermique instationnaire n'est pas impérative.

On se propose de définir une méthode de couplage adaptée à ce type de problème. Pour ce faire, au lieu de se baser sur les temps caractéristiques de l'écoulement, on choisit de décrire le système couplé en considérant comme échelle de temps celle de la conduction dans le solide. Cette échelle de temps étant grande vis-à-vis du fluide, on peut de cette façon considérer celui-ci comme étant stationnaire. Le principe de base est alors d'approcher l'écoulement variant dans le temps par une succession d'états stationnaires. De cette façon, nous avons la possibilité de caractériser l'écoulement par un nombre limité d'états stationnaires dans le temps.

Après avoir donné brièvement quelques exemples dans lesquels une approche instationnaire dans le fluide est possible, nous allons définir dans un premier temps les différents algorithmes de couplage dans le cadre d'une approche stationnaire de l'écoulement. Dans un deuxième temps, nous comparerons les différentes méthodes décrites sur le cas de la plaque plane. Nous validerons dans le même temps les résultats obtenus grâce à des données expérimentales.

Chapitre 2

Méthodes de couplage instationnaire

2.1 Approche instationnaire dans le fluide

Nous avons vu que cette méthode se heurtait, dans la plupart des cas, au choix du pas de temps pour décrire le couplage en raison des temps caractéristiques très différents ($\Delta t_f \ll \Delta t_s$). Cependant, elle peut être adaptée à certaines applications dans lesquelles les phénomènes physiques en jeu ont des échelles de temps similaires. Par exemple, Glück[29] a étudié le couplage avec des fluides très visqueux donc de nombres de Reynolds très faibles (≈ 50). Dans ce cas, les temps caractéristiques sont proches et permettent de définir un pas de temps commun. De même, une étude similaire a été menée par Bucchignani[6] qui a considéré un couplage entre un liquide et un solide. Dans ce cas, la viscosité du fluide permet également d'avoir des nombre de Reynolds faibles. Parmi les autres applications possibles, on peut citer le cas particulier de la convection naturelle où les temps liés à la convection se rapprochent de ceux de la conduction dans le solide et autorisent le choix d'une échelle de temps caractéristique du fluide. Citons enfin un exemple très particulier dans lequel le pas de temps fluide reste faible mais où le pas de temps solide peut diminuer fortement. C'est le cas du couplage avec une approche LES (Large Eddy Simulation) du fluide. En effet, dans ce type d'application, on ne s'intéresse en général qu'à la réponse thermique de la structure en très proche paroi, ce qui implique que les maillages y soient très fins. Dans ce cas les temps caractéristiques sont proches et la description instationnaire couplée est envisageable.

2.2 Approche stationnaire dans le fluide

Rappelons que le but de cette étude est d'analyser le régime transitoire thermique de la structure soumise aux sollicitations du fluide symbolisées par un flux convectif. Nous nous plaçons dans le cas le plus général, c'est-à-dire dans lequel le fluide possède une inertie thermique beaucoup plus faible que le solide. En d'autres termes, la physique dans le solide est plus lente. Nous pouvons donc faire l'hypothèse exposée plus haut, à savoir approximer l'écoulement instationnaire par une succession d'états stationnaires, ce qui revient à filtrer les hautes fréquences. De manière générale, cette méthode a l'avantage énorme de réduire le nombre de couplages conduction/convection par rapport à une méthode purement instationnaire. En outre, elle permet de coupler la structure avec un écoulement dont on ne connaît pas forcément l'état à chaque instant. En effet, dans le cas du dimensionnement des propulseurs

à propergols solides, l'ablation progressive du propergol engendre des modifications importantes de la géométrie des deux milieux. Or ces modifications ne sont pas connues à chaque instant de l'écoulement instationnaire, d'où la nécessité de décrire le couplage avec un nombre limité d'états fluides stationnaires.

2.2.1 Algorithmes de couplage

Rappel sur l'algorithme de couplage stationnaire

Avant toute chose, rappelons brièvement l'algorithme de couplage stationnaire présenté dans la partie II et les conditions de raccord associées.

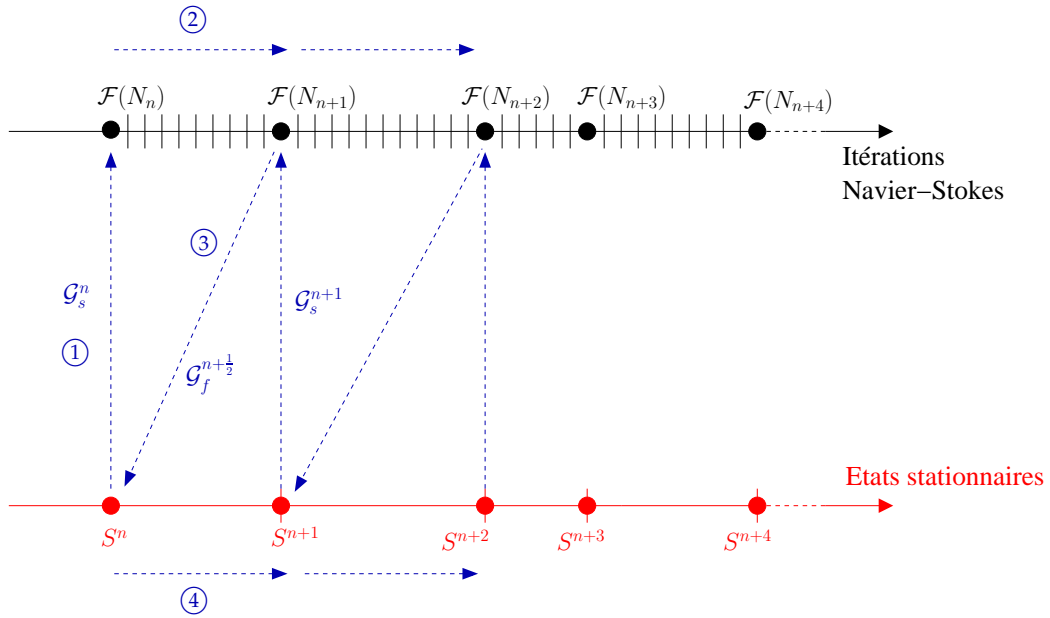


FIG. 2.1 – *Algorithme de couplage stationnaire*

La méthode consiste à coupler le fluide dont l'évolution est pseudo-instationnaire (pas de temps local) à un certain nombre d'états stationnaires dans la structure S^n (FIG. 2.1).

Les conditions de raccord générales à l'interface sont :

$$\begin{cases} q_p^{(f)n+\frac{1}{2}} + \alpha_s^n T_p^{(f)n+\frac{1}{2}} = -q_p^{(s)n} + \alpha_s^n T_p^{(s)n} \\ q_p^{(s)n+1} + \alpha_f^{n+\frac{1}{2}} T_p^{(s)n+1} = -q_p^{(f)n+\frac{1}{2}} + \alpha_f^{n+\frac{1}{2}} T_p^{(f)n+\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (2.1)$$

$$(2.2)$$

Pour simplifier nous notons les quantités échangées sous la forme générique :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_f &\equiv (q_p^{(f)}, T_p^{(f)}, \alpha_f) \\ \mathcal{G}_s &\equiv (q_p^{(s)}, T_p^{(s)}, \alpha_s) \end{aligned}$$

Le but est de déterminer un état fluide-solide stationnaire via une succession de couplages entre un état pseudo-instationnaire $\mathcal{F}(N_n)$ dans le fluide et un état stationnaire dans le solide S^n . Un cycle de couplage comprend les étapes suivantes :

- ① **Envoi des quantités \mathcal{G}_s^n au fluide.**
- ② **Calcul Navier-Stokes pseudo-instationnaire** entre les itérations N_n et N_{n+1} en imposant une condition aux limites provenant du solide. On en déduit le champ aérothermique à l'itération N_{n+1} et en particulier les quantités pariétales $\mathcal{G}_f^{n+\frac{1}{2}}$.
- ③ **Transfert des quantités $\mathcal{G}_f^{n+\frac{1}{2}}$ à la structure.**
- ④ **Calcul de conduction stationnaire** en imposant une condition provenant du fluide et détermination des quantités \mathcal{G}_s^{n+1} .

Le calcul se poursuit jusqu'à obtenir l'égalité des flux et des températures sur l'interface.

La particularité et l'intérêt de cet algorithme est que l'on couple la structure avec des états fluides non convergés. En d'autres termes, on ne laisse pas le temps au fluide de converger vers son état stationnaire. De cette façon on augmente la fréquence des couplages et on atteint plus rapidement la solution stationnaire globale. Ainsi un calcul aérothermique couplé n'est que légèrement plus coûteux en temps CPU qu'un calcul aérodynamique, le temps de la conduction et des échanges étant généralement très faibles.

Nous venons de faire le rappel de cet algorithme stationnaire pour bien marquer la différence avec l'algorithme instationnaire que nous allons présenter. Dans ce cas précis, on ne s'intéresse pas au transitoire thermique dans le solide. Le but est en effet d'obtenir un état stationnaire dans les deux milieux le plus rapidement possible. La description pseudo-instationnaire dans le fluide (utilisation d'un pas de temps local) est alors pleinement justifiée.

En revanche, nous cherchons dans ce chapitre à décrire avec précision le transitoire thermique dans le solide. Or, comme nous l'avons déjà expliqué, le temps caractéristique dans le solide est en général très supérieur à celui du fluide. On peut même considérer que ce temps est suffisant pour obtenir un régime permanent côté fluide. Il nous paraît donc justifié de ne considérer qu'une succession d'états stationnaires dans le fluide dans l'algorithme de couplage instationnaire que nous allons décrire avec précision à présent.

Algorithmes de couplage instationnaire

L'approximation d'un écoulement instationnaire en une succession d'états stationnaire répond aussi, comme nous l'avons précisé dans l'introduction, à un besoin industriel.

Côté solide, on considère donc un calcul de conduction transitoire associé à un pas de temps que l'on note Δt . Contrairement au fluide, l'état de la structure est déterminé à chaque instant. Chaque couplage avec le fluide est effectué par rapport à ce temps de conduction, en considérant le fluide comme une suite d'états stationnaires.

En résumé, dans cette approche, nous nous intéressons en fait qu'à la réponse thermique instationnaire de la structure soumise au flux convectif du fluide. En effet, l'écoulement n'est pris en compte que pour la réactualisation des conditions aux limites à l'interface.

La méthode générale est résumée sur la figure 2.2. Le but est de coupler la structure avec le fluide à des instants prédéterminés soit par l'utilisateur, soit au moyen d'un critère physique quelconque. Ce critère doit en effet nous renseigner sur les instants les plus opportuns pour effectuer un couplage. Nous donnons un exemple de critère physique au paragraphe 2.2.2. Nous avons représenté sept instants de couplage (τ_1 à τ_7 sur la figure). A présent, la difficulté est de coupler la structure avec les états stationnaires fluides correspondants. En règle générale, l'utilisateur choisit un nombre limité d'états fluides, soit pour des raisons évidentes de coût de calcul soit parce que l'écoulement n'est défini qu'à certains instants, comme dans le cas de configurations industrielles complexes.

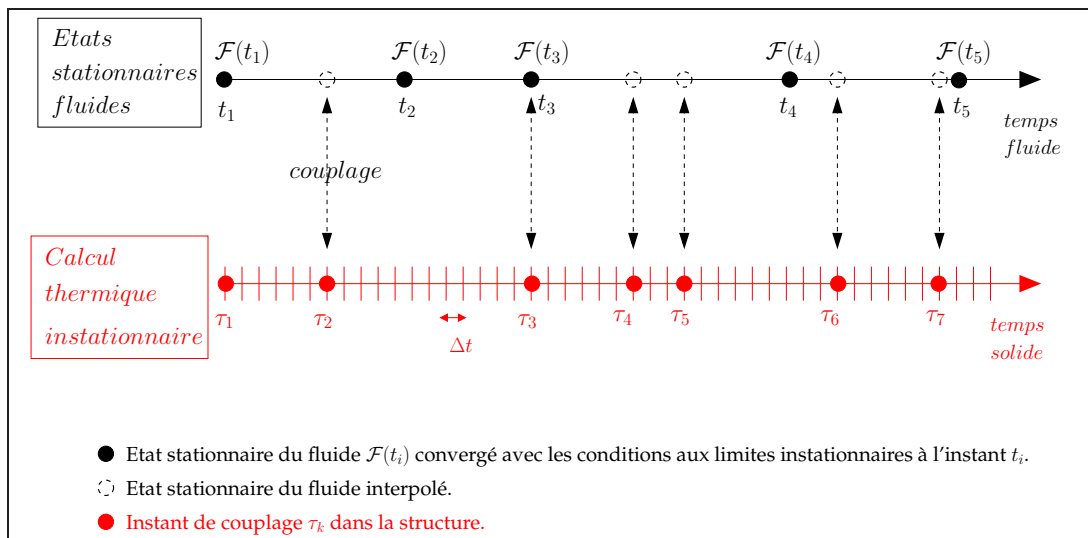


FIG. 2.2 – Algorithme de couplage instationnaire général

Deux cas de figure sont alors possibles pour le couplage :

1. Cas général : les instants de couplage τ ne coïncident pas avec les états stationnaires prédéfinis de l'écoulement : c'est le cas par exemple de l'instant τ_2 . Dans cette situation, on est forcé de coupler la structure à l'instant τ_2 avec un état fluide $F(\tau_2)$ qui ne fait pas partie des états prédéfinis. L'idée est alors d'obtenir cet état en l'interpolant grâce à ceux qui l'encadrent, à savoir $F(t_1)$ et $F(t_2)$ dans l'exemple. En effet, les instants potentiels de couplage sont beaucoup plus nombreux que les états fluides disponibles.
2. Cas particulier : les instants de couplage τ coïncident avec les états stationnaires de l'écoulement : c'est le cas par exemple de l'instant τ_3 . Dans ce cas l'interpolation n'est pas nécessaire.

Cas général

Dans le cas général, les instants de couplage sont déterminés par un critère physique, ce qui implique qu'ils ne coïncident pas forcément avec les états fluides prédéterminés par l'utilisateur. Il est alors nécessaire d'interpoler ces états. Cette situation est représentée sur la figure 2.3.

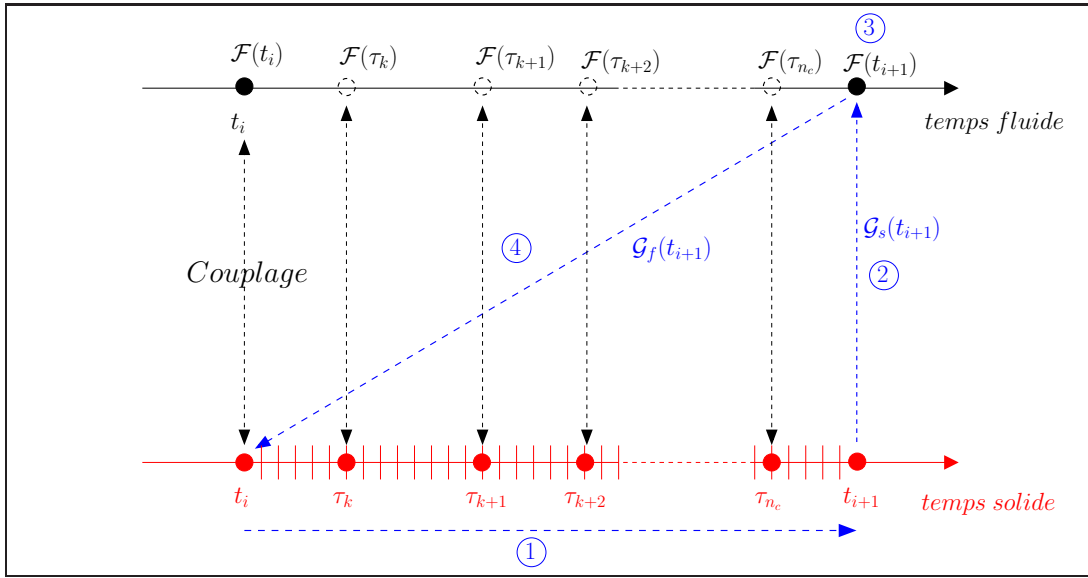


FIG. 2.3 – Instants de couplage non coïncidents

On considère deux états fluides stationnaires $\mathcal{F}(t_i)$ et $\mathcal{F}(t_{i+1})$. $\mathcal{F}(t_i)$ est connu et ne va plus évoluer. Il est issu du calcul entre les instants t_{i-1} et t_i . $\mathcal{F}(t_{i+1})$ peut être estimé initialement à l'aide de conditions aux limites approximées ou déduites de $\mathcal{F}(t_i)$. Cet état va évoluer au cours du calcul entre t_i et t_{i+1} .

On considère également un certain nombre n_c d'instants de couplage τ_k dans la structure compris entre t_i et t_{i+1} . On les notera τ_k avec $1 \leq k \leq n_c$. Ces instants sont définis en cours de calcul généralement à l'aide d'un critère physique.

Le but est toujours de partir d'un état connu du système couplé, en l'occurrence au temps t_i , et de déterminer l'évolution transitoire de la structure entre t_i et t_{i+1} via un nombre n_c de couplages intermédiaires aux instants τ_k et d'un processus d'allers-retours entre t_i et t_{i+1} .

Algorithme :

Nous partons de l'état du système connu à l'instant t_i et qui ne va plus évoluer. Nous cherchons à présent l'état du système couplé à l'instant t_{i+1} . Cette solution sera déterminée à l'aide d'une procédure basée sur des allers-retours entre t_i et t_{i+1} jusqu'à convergence. Celle-ci signifie l'obtention d'un état stationnaire dans le fluide et par conséquent la stabilisation des conditions de raccord pour la structure à l'instant t_{i+1} .

L'état du fluide $\mathcal{F}(t_i)$ et l'état du solide étant connu à l'instant t_i , le but est de déterminer l'état de la structure entre les instants t_i et t_{i+1} en mettant en œuvre un processus couplé fluide-structure.

Conditions préalables à la mise en place de l'algorithme

Côté solide, l'avancement du calcul thermique transitoire entre deux instants de couplage quelconques τ_k et τ_{k+1} est effectué en imposant des conditions aux limites interpolées entre ces deux instants. Cependant nous faisons la distinction suivante :

- premier passage dans le cycle de couplage : les quantités pariétales à l'instant τ_{k+1} étant inconnues, l'interpolation des conditions aux limites est impossible. Lors du premier passage dans la boucle décrite dans l'encadré ci-dessous, on impose alors la condition aux limites constante déterminée à l'instant τ_k .
- deuxième passage et suivants : interpolation linéaire des conditions aux limites entre τ_k et τ_{k+1} .

Côté fluide, on dispose en général d'un état $\mathcal{F}(t_{i+1})$ préalablement convergé à l'aide de conditions aux limites approximées. Cet état est par la suite remis à jour au cours du calcul couplé.

Un cycle de couplage se décompose de la façon suivante :

- ① **Calcul instationnaire dans la structure** entre les instants t_i et t_{i+1} via un certain nombre de couplages aux instants τ_k . Chaque état $\mathcal{F}(\tau_k)$ est déterminé par interpolation entre $\mathcal{F}(t_i)$ et $\mathcal{F}(t_{i+1})$. Ce dernier est réactualisé à chaque couplage avec les données obtenues à l'instant τ_k correspondant.
- ② **Transfert des données du solide** $\mathcal{G}_s(t_{i+1})$ vers le fluide.
- ③ **Remise à jour de l'état fluide** $\mathcal{F}(t_{i+1})$ à l'aide des quantités $\mathcal{G}_s(t_{i+1})$ via un calcul Navier-Stokes jusqu'à l'obtention d'un régime stationnaire dans le fluide.
- ④ **Retour à l'instant** t_i en transférant les données du fluide $\mathcal{G}_f(t_{i+1})$ obtenues à l'étape ③. On effectue alors un nouveau calcul de conduction transitoire entre t_i et t_{i+1} .

Les étapes ①, ②, ③ et ④ constituent un cycle de couplage entre les instants t_i et t_{i+1} . On répète ce cycle jusqu'à obtenir l'égalité des flux et des températures sur l'interface à l'instant t_{i+1} :

$$\begin{cases} q_p^{(f)}(t_{i+1}) = -q_p^{(s)}(t_{i+1}) \\ T_p^{(f)}(t_{i+1}) = T_p^{(s)}(t_{i+1}) \end{cases}$$

L'étape ① de l'algorithme est détaillée dans l'annexe D où l'on a précisé les conditions de raccord utilisées.

Cas particulier

C'est un cas particulier de l'algorithme exposé précédemment. A chaque instant de couplage, on dispose d'un état fluide correspondant. Autrement dit, on décide de ne coupler qu'aux instants où un état fluide est disponible. Chacun des ces états est associé à des conditions aux limites externes (vitesse, température d'arrêt, pression génératrice...) et éventuellement à une géométrie donnée. La différence avec le cas général est l'absence d'états fluides intermédiaires interpolés. L'algorithme a été simplifié dans la mesure où les instants de couplage sont moins nombreux. Ils sont en effet définis par l'utilisateur de telle façon qu'ils coïncident avec les états $\mathcal{F}(t_i)$. L'algorithme est représenté sur la figure 2.4.

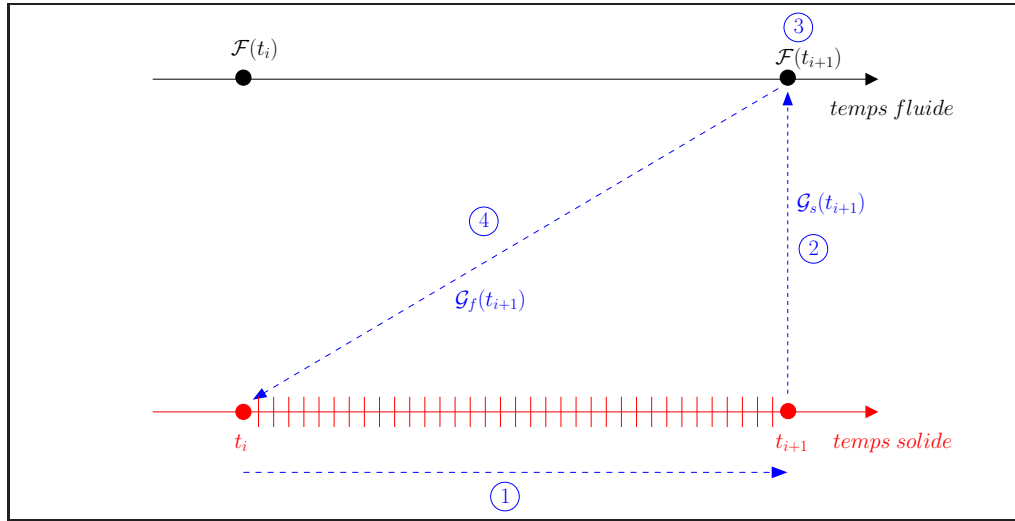


FIG. 2.4 – Instants de couplages coïncidents

La procédure de couplage est identique à celle de la méthode générale : on effectue un certain nombre d'allers-retours dans le solide entre les temps t_i et t_{i+1} jusqu'à égalité des flux et des températures. La seule différence est que l'on effectue directement le calcul de conduction t_i à t_{i+1} , c'est-à-dire sans passer par des couplages intermédiaires avec des états fluides interpolés. Les conditions aux limites à l'interface sont interpolées entre t_i et t_{i+1} (voir annexe D).

2.2.2 Déclenchement dynamique des échanges

Nous avons vu que le choix des instants de couplage dans la structure pouvait se faire de deux manières :

- dans le cas général : on les détermine dynamiquement au cours du calcul au moyen d'un critère physique. Dans ce cas, ils ne coïncident pas généralement avec les états fluides stationnaires.
- dans le cas particulier : l'utilisateur les positionne de telle sorte qu'ils coïncident avec les états fluides stationnaires.

La deuxième solution a l'inconvénient de ne pas tenir compte de l'évolution thermique et les instants de couplage sont placés arbitrairement. En particulier, s'il n'y a pas assez d'états fluides prédéfinis, on laisse le système évoluer sur une durée trop longue entre deux couplages et l'on risque de s'éloigner de la solution. Dans le premier cas, on peut définir un critère qui contrôle, à chaque pas de temps de conduction dans le solide, l'évolution relative du système depuis le dernier couplage. Nous avons choisi de contrôler les variations de la température de paroi au cours du temps. En effet, à chaque instant t du calcul de conduction, on détermine la variation maximale de la température pariétale par rapport au dernier instant de couplage τ_k . Cette variation est normalisée par la moyenne des températures sur l'interface.

$$\frac{|T_p(t) - T_p(\tau_k)|_{max}}{\frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} T_{p(i)}(t)} > \epsilon, \quad (2.3)$$

\mathcal{N} est le nombre points d'intégration sur l'interface (les nœuds pour le solide et le centre des éléments de surface pour le fluide). $T_{p(i)}(t)$ désigne la température de paroi du $i^{\text{ième}}$ point d'intégration de l'interface côté structure.

Si la relation (2.3) est vérifiée, l'instant t devient l'instant de couplage suivant τ_{k+1} . Dans le cas contraire, le calcul de conduction se poursuit.

Chapitre 3

Application : écoulement sur une plaque plane

Nous allons maintenant mettre en application les méthodes de couplage décrites au chapitre précédent. Nous avons exposé deux approches distinctes en ce qui concerne le choix des instants de couplage :

- Les instants de couplage sont déterminés à l’aide d’un critère physique et ne coïncident pas avec les états fluides stationnaires prédéterminés : dans ce cas, on est obligé d’interpoler les états existants (FIG. 2.3).
- Les instants de couplage sont fixés par l’utilisateur de manière à coïncider avec les états fluides : on couple directement le solide avec les états connus, sans interpolation (FIG. 2.4).

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser à la deuxième approche, à savoir une méthode dans laquelle on couple la structure avec des états fluides connus. Plus précisément, nous allons définir deux types d’algorithme. Le premier, que nous appellerons algorithme de référence consiste coupler à chaque pas de temps du solide. Dans ce cas de référence, le nombre d’instants de couplage qu’il est possible de définir est maximum (FIG. 3.1), toujours dans le cadre de l’approximation faite (filtrage des hautes fréquences). Le deuxième type d’algorithme est basé sur le même principe à la différence que l’on définit moins d’instants de couplage. Dans le cas, on est obligé d’interpoler les sollicitations du fluide entre chaque instant de couplage. On appellera ce type d’algorithme, algorithme « dégradé » (on diminue le nombre de couplages par rapport à l’algorithme de référence).

Remarque :

En toute rigueur, l’algorithme de référence devrait être caractérisé par des couplages systématiques à chaque pas de temps fluide et non solide. Cependant, ce processus serait extrêmement coûteux mais aussi inutile. En effet, avec les conditions aérothermiques adoptées, on n’observerait aucune évolution significative dans le solide. On renvoie ici le lecteur à la discussion du chapitre IV.1 sur les temps caractéristiques dans chaque milieu.

Ce chapitre est divisé en deux parties. Dans la première nous testons la validité de l'algorithme de référence grâce à des mesures expérimentales effectuées sur la plaque plane. Nous pourrions ainsi évaluer l'efficacité de cette méthode dite de référence.

Dans la deuxième partie, nous comparons, toujours sur le cas de la plaque plane, plusieurs algorithmes dégradés à l'algorithme de référence qui a été validé dans la première partie. Ainsi, nous pourrions évaluer la précision de la solution en fonction du nombre d'instant de couplage considéré. Dans cette partie, nous étudions deux types d'écoulement, l'un laminaire et l'autre turbulent.

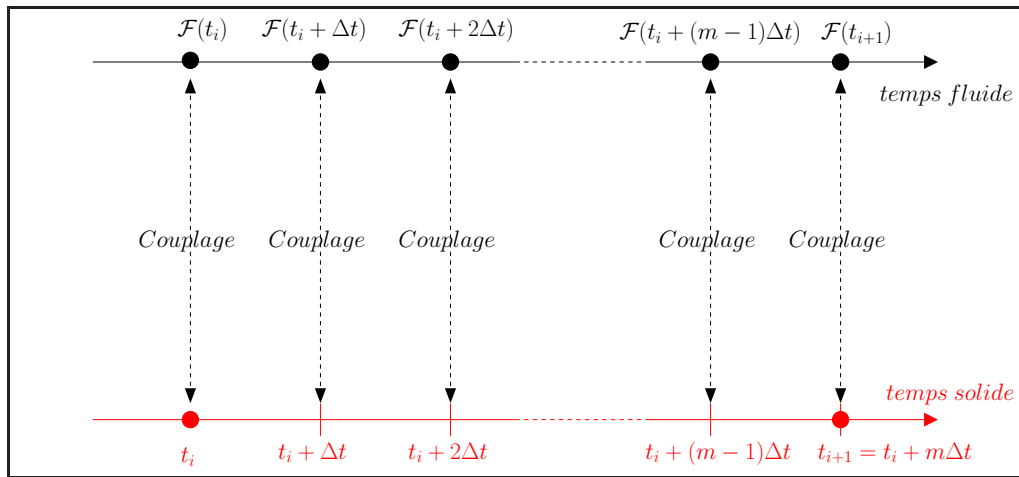


FIG. 3.1 – Algorithme de référence

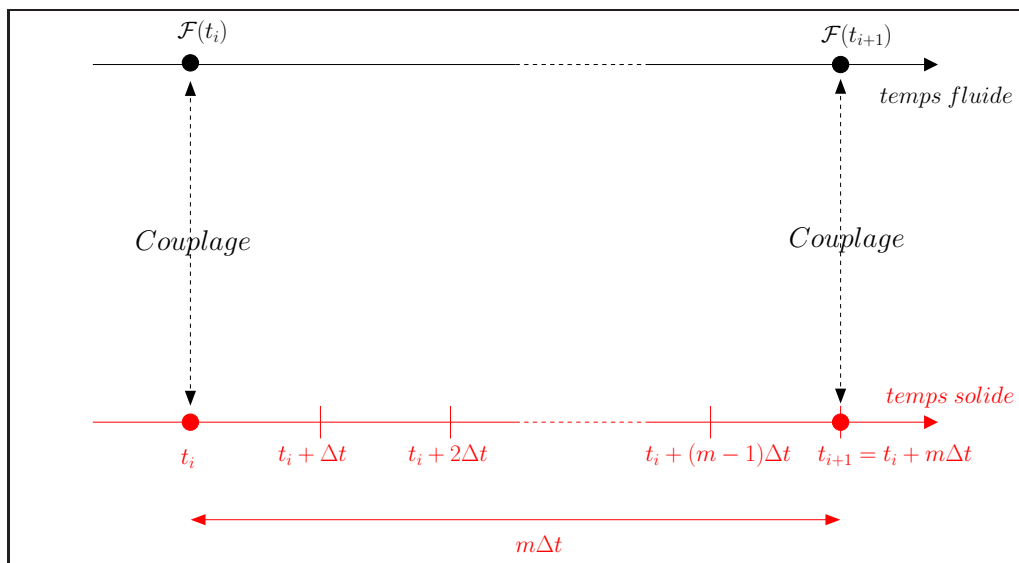


FIG. 3.2 – Algorithme « dégradé »

3.1 Choix des conditions de raccord

Nous avons vu au chapitre II.2 que la stabilité et la convergence du processus itératif de couplage dépendait du choix des conditions de raccord, en d'autres termes des coefficients α_f et α_s . Dans le cadre de l'algorithme instationnaire, ce choix doit tenir compte de deux aspects distincts. Le premier concerne l'importance des échanges thermiques à la paroi. En effet, si les transferts de chaleur sont forts, en particulier si le flux convectif est important, l'instabilité du processus itératif de couplage augmente. Dans ce cas, le choix d'une condition de Fourier côté solide, c'est-à-dire avec un terme de relaxation stabilisateur, est préférable à une condition de Neumann qui correspond à un flux imposé. Le deuxième aspect à prendre en compte dans le choix des conditions de raccord est la durée entre deux couplages successifs. En effet, si l'on impose par exemple un flux convectif donné sur une durée trop importante par rapport à un pas de temps de conduction, la température résultante risque d'être très éloignée de la solution recherchée voir aberrante par rapport aux conditions aux limites de l'écoulement.

En résumé, pour déterminer le type de condition de raccord à utiliser, il faut tenir compte d'une part du flux convectif à la paroi et d'autre part de la durée sur laquelle on impose ce flux, en d'autres termes la durée entre deux instants couplages successifs.

3.2 Validation expérimentale

Le but est de valider l'algorithme de référence en le comparant à des mesures expérimentales de température de paroi en convection forcée sur une plaque plane. Nous pourrions ainsi confronter les résultats obtenus aux données expérimentales. Cette étude fait l'objet d'un article en cours [10].

3.2.1 Mesures expérimentales

Ces mesures ont été effectuées au Laboratoire de Thermo-Mécanique de l'Université de Reims Champagne-Ardennes par Rebay. Le cas étudié est la convection forcée sur une plaque plane soumise à une densité de flux variable en face arrière. Le but est de déterminer expérimentalement l'évolution de la température à la paroi en fonction du temps. Le cas est représenté sur la figure 3.3.

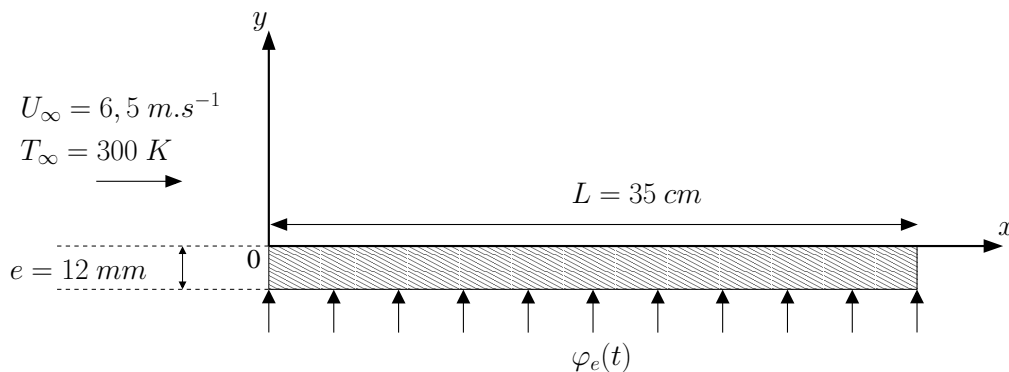


FIG. 3.3 – Plaque plane

Montage

Le montage est schématisé sur la figure 3.4. Le matériel utilisé est :

- Un ordinateur pour l’acquisition des données.
- Deux projecteurs halogènes reliés à un système permettant de délivrer un flux variable.
- Une caméra de thermographie infrarouge de marque FLIR.
- Une plaque en PVC de 12 mm d’épaisseur.
- Un ventilateur muni d’un moteur permettant de faire varier la vitesse de l’écoulement.

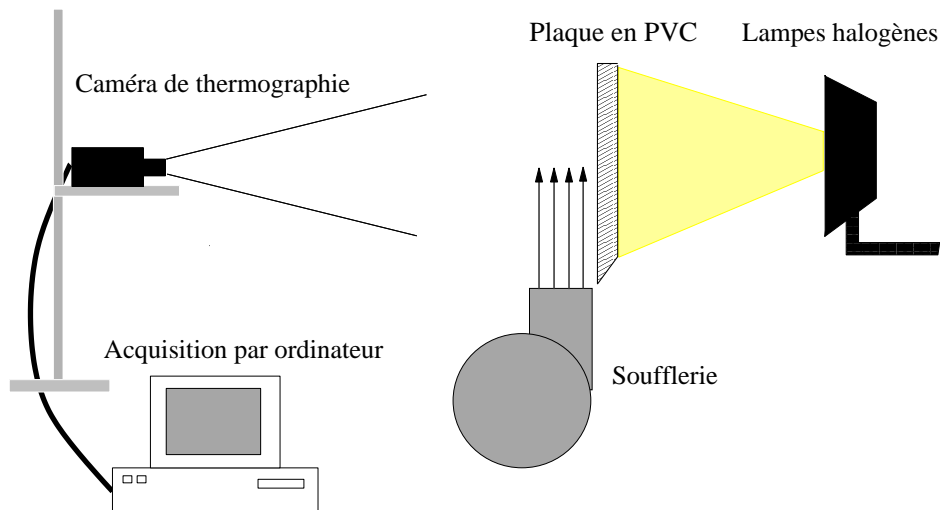


FIG. 3.4 – Schéma du montage

La caméra et la plaque sont fixes. La convection forcée est assurée par le système de soufflerie muni d'une grille en forme de nid d'abeille pour avoir un écoulement plus homogène. Les lampes halogènes délivrent une densité flux variable au niveau de la face arrière de la plaque. Afin d'éviter toute perturbation extérieure, des panneaux ont été ajoutés de chaque côté de la plaque. De plus, les effets turbulents indésirables au niveau du bord d'attaque sont réduits grâce à une forme bisotée.

La caméra de thermographie filme la face avant de la plaque. Ce procédé permet de visualiser en temps réel la température de surface. Chaque image est enregistrée par un ordinateur à partir duquel les thermogrammes sont extraits (FIG. 3.5).

Les mesures sont effectuées sur un écoulement d'air laminaire en convection forcée sur une plaque plane en PVC. La vitesse de l'air à l'entrée est maintenue constante. A partir d'un état isotherme à l'instant $t = 0$, on applique sur la face arrière de la plaque un premier échelon de

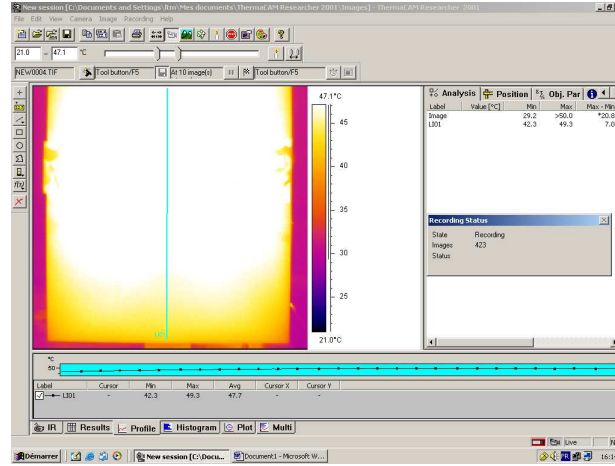


FIG. 3.5 – Image de thermographie de la face avant de la plaque

flux de densité $\varphi_e^{(1)} = 140 \pm 10 \text{ W.m}^{-2}$. Ce flux est maintenu jusqu'à $t = 5400 \text{ s}$. A l'instant $t = 5400 \text{ s}$, un deuxième échelon est appliqué et la densité passe alors à $\varphi_e^{(2)} = 170 \pm 20 \text{ W.m}^{-2}$ (FIG. 3.6). La conductivité de la plaque est $k_s = 0,16 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ et la chaleur spécifique est $C = 1,92.10^6 \text{ W.K}^{-1}$.

Les mesures de température ont été effectuées en plusieurs points ($x = 5 \text{ cm}$, $x = 11 \text{ cm}$, $x = 17 \text{ cm}$, $x = 20 \text{ cm}$ et $x = 23 \text{ cm}$) de la face avant de la plaque à l'aide de la caméra de thermographie infrarouge. La figure 3.7 représente l'élévation de la température pariétale par rapport à la température ambiante T_{amb} suite aux deux échelons.

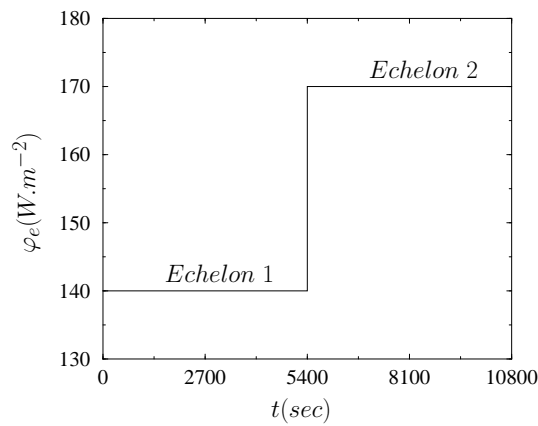
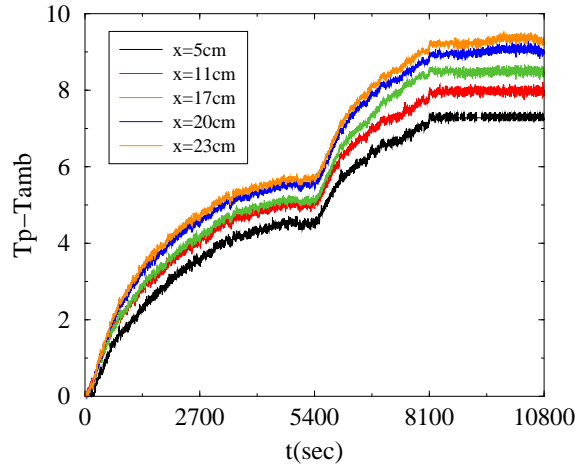


FIG. 3.6 – Flux imposé en face arrière en fonction du temps

FIG. 3.7 – Thermogrammes relatifs $T_p - T_{amb}$

3.2.2 Calcul numérique

On effectue une simulation numérique du problème de la figure 3.3 en utilisant l'algorithme de couplage défini sur la figure 3.1 et qui correspond à l'algorithme de référence. Connaissant le temps caractéristique de diffusion de la chaleur dans la plaque, nous considérons un pas de temps de conduction $\Delta t_s = 60$ s. Dans le cadre de la méthode de référence, le nombre d'instants de couplage t_i est égal au nombre de pas de temps, c'est-à-dire 180. Les conditions aux limites sont celles de la figure 3.3.

Conditions de raccord

Au regard des conditions aux limites liées à l'écoulement, on peut supposer que l'évolution de l'état thermique du système est faible à la paroi par rapport à un pas de temps de conduction. D'autre part, la durée qui sépare deux instants de couplage est également faible car elle correspond à un pas de temps Δt . L'utilisation des conditions de Dirichlet-Neumann est alors possible. L'absence de terme de relaxation donne une convergence plus rapide. Nous utilisons donc les conditions :

$$\begin{aligned} T_p^{(f)} &= T_p^{(s)} \\ q_p^{(s)} &= -q_p^{(f)}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

dans lesquelles le fluide reçoit la température et le solide le flux de chaleur. Notons que, dans le cadre de la méthode de référence, les conditions aux limites issues du fluide ne sont pas interpolées dans le temps au niveau de la structure. Les instants de couplage sont en effet confondus avec les instants de conduction dans le solide. En d'autres termes les couplages ont lieu à chaque pas de temps solide Δt .

3.2.3 Résultats et interprétations

La figure 3.8 donne l'évolution des températures de paroi en fonction du temps pour chaque point de mesure. Nous avons représenté la température relative $\theta = T_p - T_{amb}$ et le résidu $(\theta_{calcul} - \theta_{expérience})$.

Les résultats obtenus par le calcul sont globalement en accord avec l'expérience. Nous pouvons cependant faire quelques remarques.

D'abord, on constate que les valeurs numériques sont très proches des valeurs expérimentales pour le premier échelon et la première partie du deuxième échelon. Cependant, on observe, à partir de $t = 6000$ s, une différence plus marquée à cause d'une décroissance anormale du profil expérimental. Cette décroissance est due à une modification des conditions de mesures et plus précisément une modification de la température de l'air ambiant provoquée par des perturbations extérieures (courant d'air dans la pièce).

Les différences entre les valeurs expérimentales et numériques peuvent globalement s'expliquer par la diffusion de la chaleur dans la largeur de la plaque. En effet, le calcul numérique plan ne tient pas compte de cette diffusion et des pertes de chaleur qu'elle engendre dans un système 3D.

Enfin, notons que la détermination de certaines données de l'expérience comme les conditions aux limites (vitesse et température d'arrêt, paroi adiabatique en entrée/sortie) et les caractéristiques physiques de la plaque (conductivité thermique et la capacité calorifique) comportent une marge d'erreur par rapport à la réalité de l'expérience et entraînent fatalement des écarts au niveau des températures.

3.3 Comparaison des méthodes de couplage

Les résultats obtenus sur le cas de validation ont montré que l'algorithme de référence donnait de très bons résultats. Cependant, cette méthode nous oblige à effectuer un nombre important de couplages entre le fluide et le solide. Pour diminuer le nombre d'instantes de couplage, nous allons utiliser l'algorithme dégradé représenté sur la figure 3.2. Dans ce type d'algorithme, deux instants de couplage successifs sont séparés par un certain nombre d'incréments de conduction. L'idée est alors d'interpoler linéairement les sollicitations du fluide.

Nous allons reprendre le calcul de la plaque plane et définir deux cas, l'un laminaire et l'autre turbulent. Dans chacun des cas, nous allons comparer les résultats obtenus par l'algorithme de référence avec un ou plusieurs algorithmes dégradés.

Initialisation du couplage :

Comme nous l'avons exposé dans le chapitre précédent, les états fluides sont en général prédéterminés préalablement à l'aide de conditions aux limites approximées. Dans ce cas, ils sont remis à jour au cours du calcul. Cependant, on considère ici que ces états ne sont pas convergés initialement et sont donc déterminés au cours du calcul en fonction des instants de couplage.

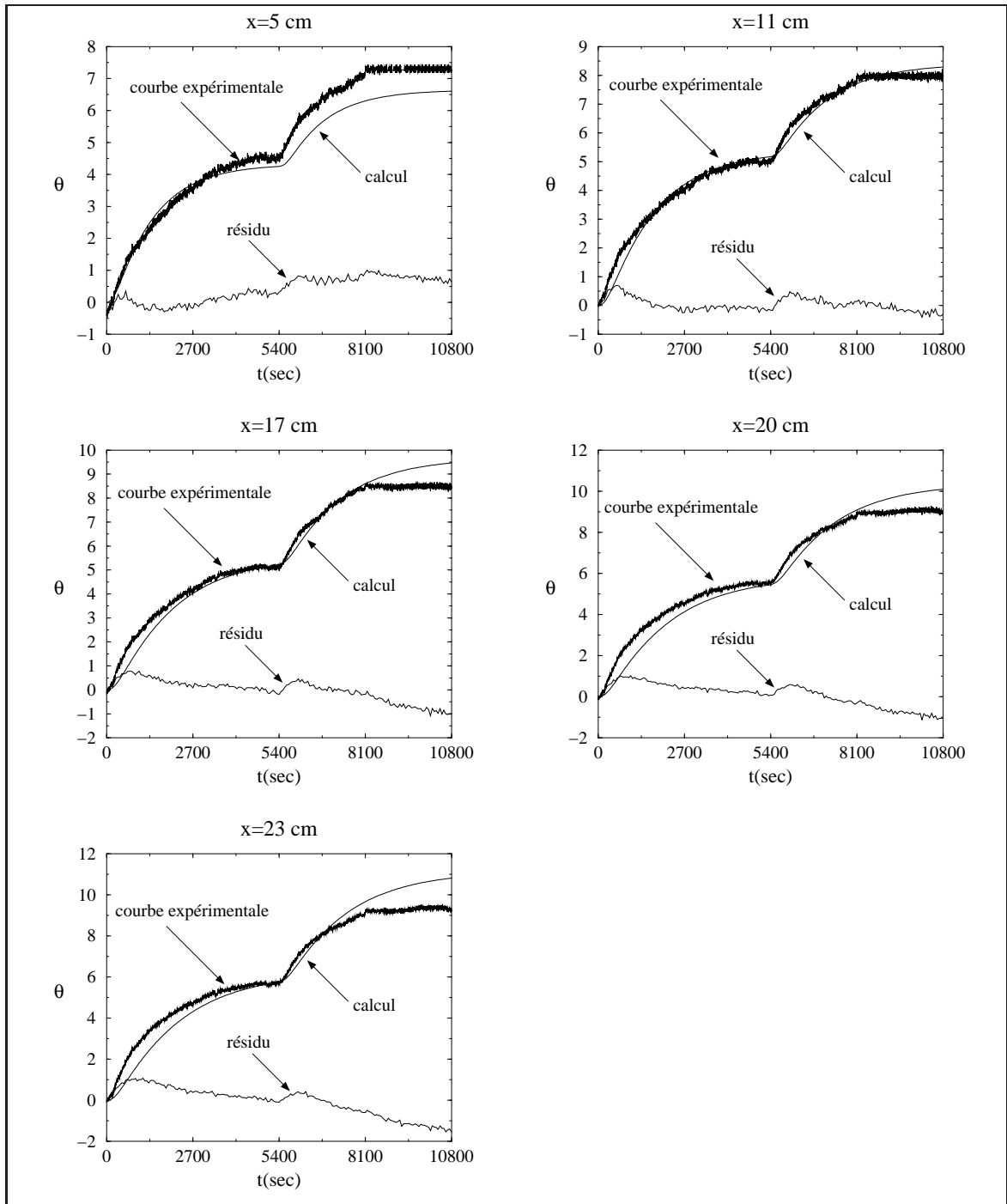


FIG. 3.8 – Comparaison des températures expérimentales et numériques.

Dans ce cas, seul le premier état fluide $\mathcal{F}(t_0)$ est convergé préalablement à l'aide de la température initiale de la structure $T_0 = 300$ K. De cette état convergé on déduit le flux de chaleur initial q_0 qui nous permet de débiter le calcul.

3.3.1 Calcul laminaire

Le cas laminaire correspond au cas de validation de la figure 3.3 que nous venons de présenter. Les conditions de raccord utilisées sont celles de Dirichlet-Neumann de la relation (3.1).

Calculs « dégradés »

Nous avons effectué deux calculs en utilisant l'algorithme « dégradé ». Dans le premier, nous avons défini sept instants de couplage et dans le deuxième trois instants de couplage. Nous les appellerons respectivement calcul n°1 et calcul n°2. Nous avons reporté les temps de couplage sur la courbe de flux imposé en face arrière et représenté sur la figure 3.9. Il est en effet nécessaire de définir suffisamment d'instant de couplage pour pouvoir décrire correctement cette courbe en échelons. Celle-ci ayant une singularité à $t = 5400$ s, nous avons défini deux instants de couplage autour de $t = 5400$ s, soient $t = 5340$ s et $t = 5460$ s.

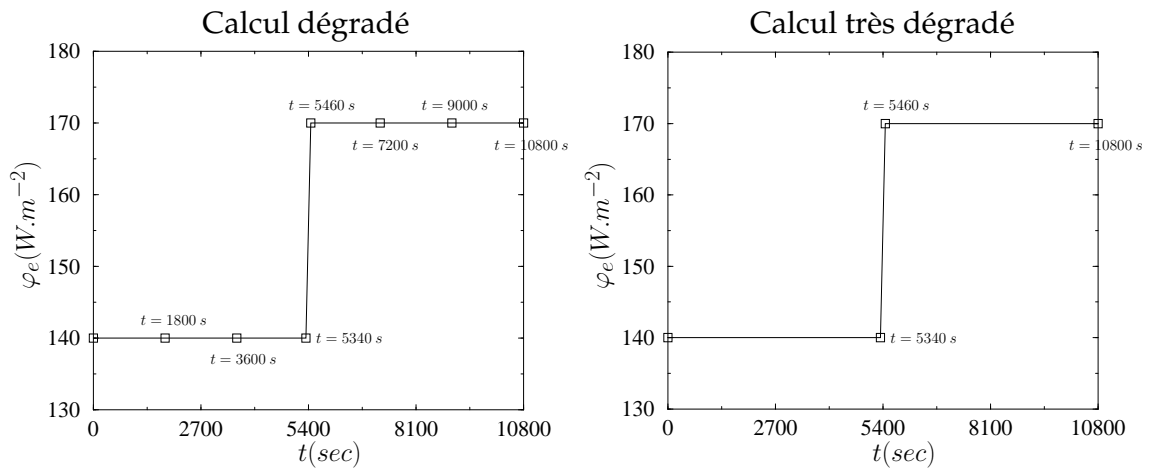


FIG. 3.9 – Répartition des instants de couplage pour les calculs n°1 (à g.) et n°2 (à d.)

Conditions de raccord

Contrairement au cas de référence précédent, la durée entre deux couplages est bien plus élevée. Cependant, toujours dans un souci d'atteindre plus rapidement la convergence et étant donné la faiblesse des échanges thermiques à la paroi, nous faisons l'hypothèse que l'utilisation des conditions de Dirichlet-Neumann ne pose pas de problème de stabilité.

Résultats

Les figures 3.10 et 3.11 comparent les profils de température et de flux obtenus par le calcul de référence validé par l'expérience d'une part et par les deux calculs « dégradés » d'autre part. On constate que la réponse en température dans le cas n°2 est très différente de celle du calcul de référence. Cet écart est dû à la variation du flux de chaleur entre les instants de couplage. En revanche, dans le cas n°1 les thermogrammes sont plus proches du cas de référence.

Il semble donc que, dans le cas n°1, le nombre d'instants de couplage soit suffisant pour restituer le comportement thermique du système à la paroi. On constate que l'interpolation du flux reste assez fidèle au flux de référence. Dans le cas n°2, le nombre d'instants de couplage est trop faible. Dans ce cas précis, l'interpolation linéaire du flux est effectuée sur une durée trop grande et égale à un échelon, ce qui donne des profils différents de ceux du calcul de référence. L'écart maximum est d'environ 30%.

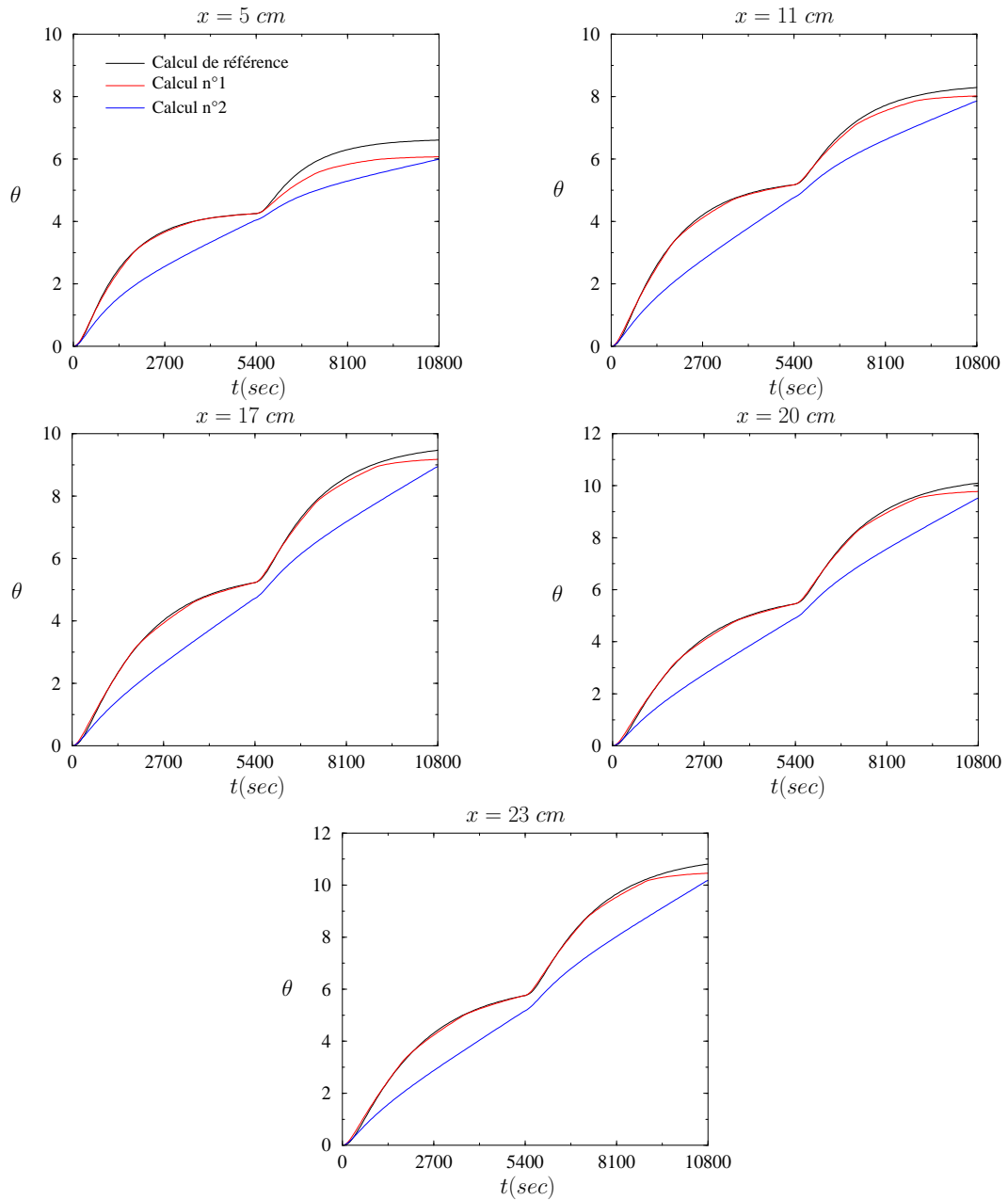


FIG. 3.10 – Comparaison des profils de température relative $\theta = T_p - T_{amb}$

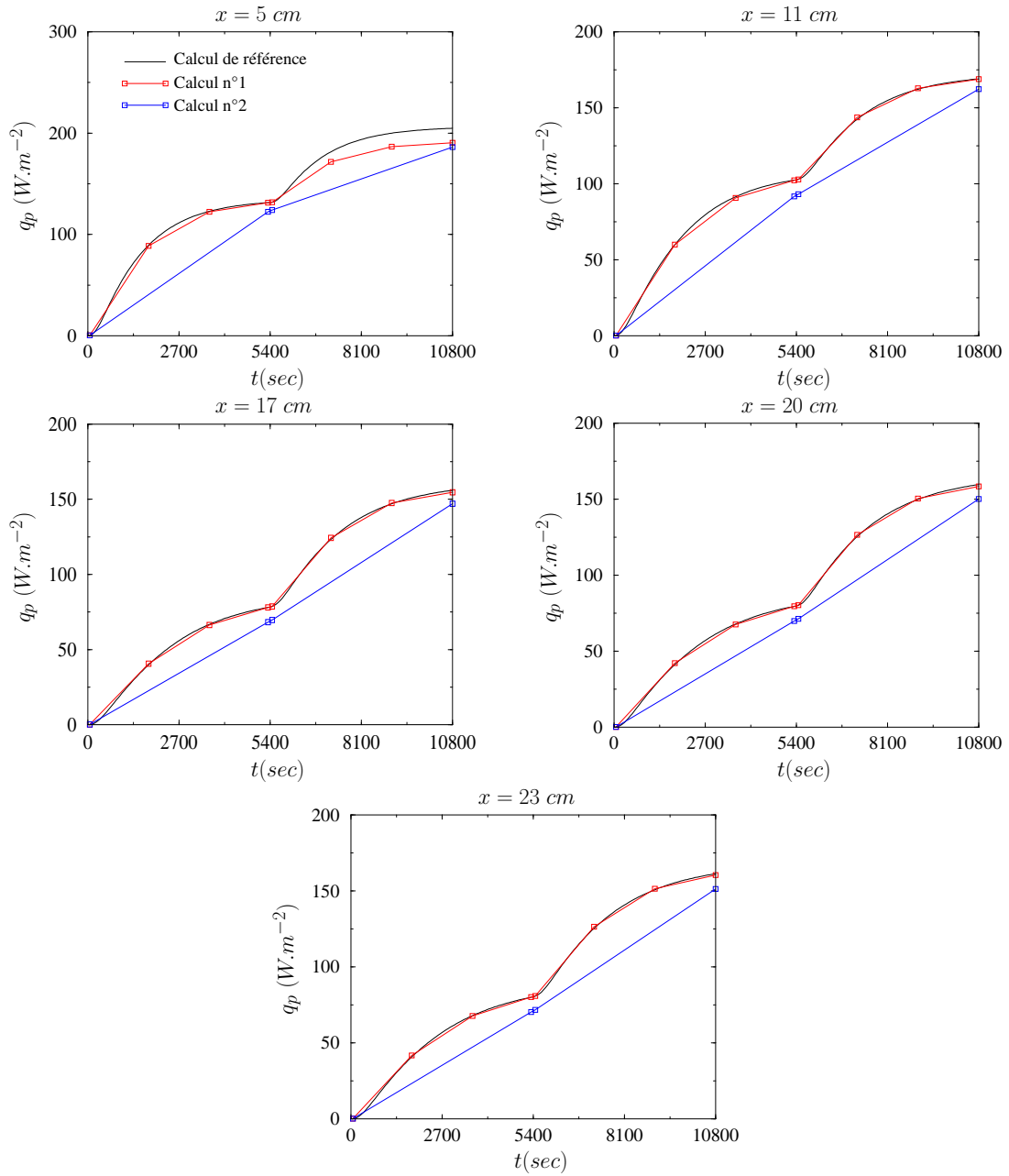


FIG. 3.11 – Comparaison des flux de chaleur à la paroi. Les points représentent les instants de couplage

3.3.2 Calcul turbulent

Nous allons maintenant nous placer dans des conditions d'écoulement très différentes du cas précédent. En effet, nous considérons ici une problématique plus industrielle. Nous désirons étudier le comportement des algorithmes de couplage (de référence et dégradé) sur un cas pour lequel d'une part nous n'avons aucune donnée expérimentale et d'autre part les échanges thermiques à la paroi sont très violents. Nous considérons pour cela un écoulement d'air turbulent à très haute température sur une plaque plane. Les caractéristiques de l'écoulement nous ont été fournies par Snecma Propulsion Solide et sont analogues à celles que l'on rencontre dans les propulseurs à propergol solide où l'étude des interactions thermiques entre les gaz de propulsion et les matériaux composites du propulseur est un enjeu majeur. Ce type de problème caractéristique rentre totalement dans un cadre aérothermique instationnaire couplé avec la conduction. L'objectif est ici de déterminer l'évolution thermique de la structure soumise à des températures extrêmes.

Le cas étudié représenté sur la figure 3.12. On considère un profil de vitesse instationnaire $U_\infty(t)$ à l'entrée qui varie linéairement entre 100 m.s^{-1} à $t = 0 \text{ s}$ et 500 m.s^{-1} à $t = 500 \text{ s}$. La température d'arrêt T_∞ est fixée à 3000 K et la plaque est initialement à $T_0 = 300 \text{ K}$.

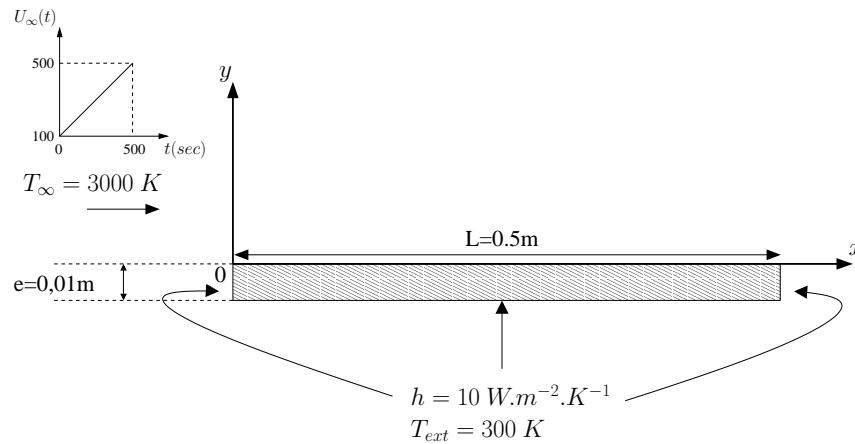


FIG. 3.12 – Plaque plane

Caractéristiques du calcul

Côté fluide

Caractéristiques physiques :

- Conductivité thermique : $k_f = 0,174 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$
- Capacité calorifique : $C_p^{(f)} = 2859 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$
- Masse volumique : $\rho_f = 0,11477 \text{ kg.m}^{-3}$

Caractéristiques de l'écoulement :

- Vitesse à l'entrée : profil linéaire entre $t = 0$ s et $t = 500$ s.
- Température à l'entrée : $T_\infty = 3000$ K
- Nombre de Prandtl laminaire : $Pr = 0,7966$
- Nombre de Reynolds : $Re_L = \frac{\rho_f C_p^{(f)} U_\infty L}{k_f Pr} = 2,3.10^5$

Côté SolideDimensions de la plaque :

- Longueur : $L = 0,5$ m
- Epaisseur : $e = 1$ cm

Caractéristiques physiques :

- Conductivité thermique : $k_s = 35$ W.m⁻¹.K⁻¹
- Capacité calorifique : $C_p^{(s)} = 1500$ J.kg⁻¹.K⁻¹
- Masse volumique : $\rho_s = 1800$ kg.m⁻³

Condition aux limites externe :

- Coefficient de convection : $h = 10$ W.m⁻².K⁻¹
- Température externe : $T_e = 300$ K

Température initiale : $T_0 = 300$ K**Choix du pas de temps**

Les temps caractéristiques correspondants sont :

- Temps de convection fluide : $\tau_f^c = \frac{L_f}{U} \approx 2,5$ ms
- Temps de diffusion fluide : $\tau_f^d = Pr \frac{L_f}{U} \approx 2$ ms
- Temps de diffusion solide : $\tau_s^d = \frac{\rho_s C_s e_s^2}{k_s} \approx 7$ s

τ_s^d correspond au temps nécessaire au flux de chaleur pour traverser l'épaisseur de la plaque. Il est très grand devant le temps de diffusion dans le fluide. On a en effet $\frac{\tau_s^d}{\tau_f^d} \approx 2800$.

Pour fixer le pas de temps du calcul, nous allons nous baser, comme nous l'avons dit, sur le temps de conduction dans la plaque. Si l'on note δy_s la dimension caractéristique de la première maille solide à la paroi, le temps de diffusion correspondant est :

$$\tau_s^d = \frac{\rho_s C_s \delta y_s^2}{k_s} = 0,3 \text{ s} \quad \text{avec} \quad \delta y_s = 10^{-3} \text{ m} \quad (3.2)$$

Le flux de chaleur généré par le fluide met donc 0,3 s pour atteindre la première maille du maillage structure. Nous fixons le pas de temps à $\Delta t = 0,5 \text{ s}$.

Calcul de référence

Dans le cadre de l'algorithme de référence, le nombre d'instantes de couplage est égal au nombre de pas de temps de conduction Δt , à savoir 1000.

Notons que l'initialisation du calcul est ici très importante en raison des très forts gradients thermiques à la paroi. On rappelle que le premier état fluide $\mathcal{F}(t_0)$ est convergé en imposant comme température de paroi la température initiale de la structure $T_0 = 300 \text{ K}$.

Conditions de raccord

Dans le cas laminaire, nous avons considéré que l'évolution thermique du système était assez lente et permettait l'utilisation d'une condition de Neumann côté solide. Le cas turbulent est tout autre. En effet, en raison de la différence de température entre le fluide ($T_\infty = 3000 \text{ K}$) et la structure initialement ($T_0 = 300 \text{ K}$), on peut s'attendre à des échanges thermiques très violents, c'est-à-dire un flux convectif très élevé. Or, l'utilisation d'une condition de Neumann dans le solide revient à lui imposer ce flux, ce qui risque de déstabiliser a priori le système. Cependant, dans le cas d'un calcul de référence, n'oublions pas que le temps qui sépare deux instantes de couplage est égal à un pas de temps de conduction Δt . Or, par définition, l'évolution thermique de la structure sur un pas de temps est faible. On en déduit que l'évolution thermique du système fluide-solide est faible entre chaque couplage.

Pour résumer, nous avons d'un côté des échanges thermiques à la paroi très élevés, interdisant a priori une condition de Neumann, et de l'autre une durée qui sépare deux couplages successifs faibles, ce qui est a priori favorable au choix d'une condition de Neumann. Nous choisissons, comme dans le cas laminaire, de favoriser la vitesse de convergence et de considérer une condition de Neumann, c'est-à-dire flux imposé côté solide. En effet, l'avantage d'une telle condition est l'absence d'un terme de relaxation qui, bien que stabilisateur, ralentit la convergence.

Résultats

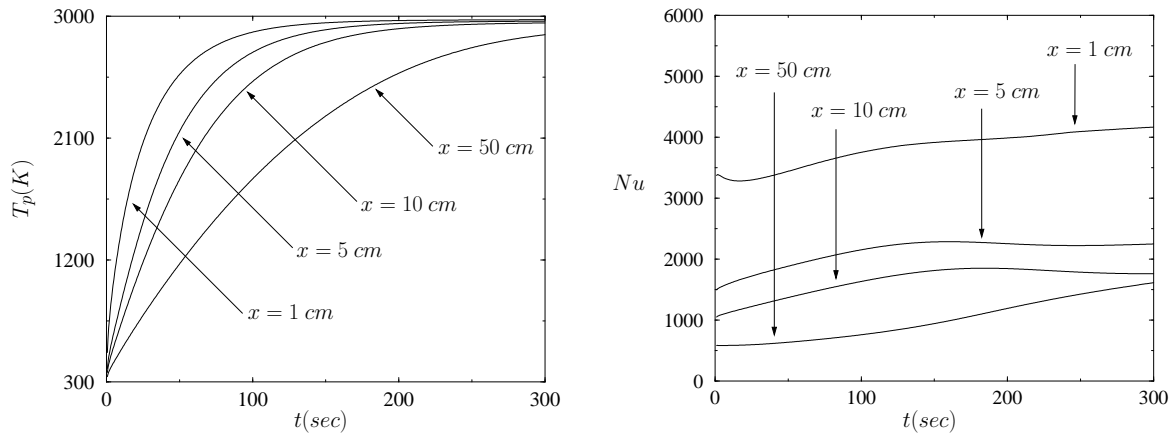


FIG. 3.13 – Profils de température et de Nusselt par la méthode de référence

Les résultats du calcul de référence sont donnés sur la figure 3.13 où nous avons représenté les profils de température et de Nusselt $Nu = \frac{h_f L}{k_f}$ à la paroi en fonction du temps et pour plusieurs abscisses x . Nous avons représenté les 300 premières secondes du calcul car elles suffisent à atteindre l'état stationnaire. On retrouve les profils caractéristiques de la plaque plane et on peut suivre le réchauffement de celle-ci au cours du temps. Au niveau de la paroi, on passe de la température initiale $T_0 = 300$ K à une température proche de la température d'arrêt du fluide $T_\infty = 3000$ K. On constate également que les échanges de chaleur varient peu dans le temps.

Calcul « dégradé »

Nous avons effectué un deuxième calcul en utilisant l'algorithme dégradé. Nous avons diminué de façon conséquente le nombre d'instants de couplage. En effet, nous avons choisi une période d'échange égale à $100\Delta t = 50$ s, soient 10 instants de couplage au total.

Conditions de raccord

L'hypothèse que nous avons faite pour le calcul de référence sur le choix des conditions de raccord n'est plus applicable à présent. En effet, dans le cadre d'un calcul « dégradé », le temps $\Delta\tau = t_{i+1} - t_i$ qui sépare deux instants de couplage est égal à 100 pas de temps de conduction. Or, si $\Delta\tau$ est trop élevé, la variation du flux convectif entre deux instants de couplage sera très importante en raison des conditions de température et de vitesse de l'écoulement et cela risque de donner des résultats en température loin de la réalité voir aberrants. On en déduit qu'une condition de Neumann est complètement exclue dans ce cas précis.

L'étude de stabilité du paragraphe II.2.2 a montré que l'ajout d'un terme de relaxation permet d'amortir les effets du flux convectif et suffit à stabiliser le système. On impose alors les conditions de Dirichlet-Fourier :

$$\begin{aligned} T_p^{(f)} &= T_p^{(s)} \\ q_p^{(s)} &= -q_p^{(f)} - \alpha_f \left(T_p^{(s)} - T_p^{(f)} \right) \end{aligned}$$

où α_f correspond à l'un des coefficients stabilisateurs que nous avons mis en évidence dans la partie II, à savoir :

$$\alpha_f^{(sup)} = \frac{q_p^{(f)}}{T_p^{(f)} - T^*} \quad (3.3)$$

$$\alpha_f^{(opt)} = \frac{\alpha_f^{(sup)}}{2} \left(\sqrt{\left(1 + \frac{1}{D}\right)^2 - 1} - \frac{1}{D} \right), \quad (3.4)$$

avec $D = \frac{k_f \Delta t}{\rho C_f \Delta x^2}$. On rappelle que T^* est la température de première maille adjacente à la paroi.

Cette condition permet de stabiliser a priori le processus itératif de couplage. Appliquée à l'algorithme instationnaire dégradé, on impose côté structure une condition de Fourier interpolée entre deux instants de couplage consécutifs t_i et t_{i+1} ¹. Pour $t_i < t < t_{i+1}$, on écrit :

$$q_p^{(s)}(t) = -q_p^{(f)}(t) - \alpha_f(t) \left(T_p^{(s)}(t) - T_p^{(f)}(t) \right) \quad (3.5)$$

Cette condition est imposée sur une durée égale à $\Delta\tau = t_{i+1} - t_i = 100\Delta t$. Cette durée est donc très grande devant Δt et en raison du caractère instationnaire de la structure, la température de paroi résultante $T_p^{(s)}(t_{i+1})$ risque d'être très élevée et de dépasser par exemple la température d'arrêt du fluide T_∞ . Ceci est tout à fait normal car le fluide « chauffe » la paroi solide de façon continue pendant $\Delta\tau$.

Le problème vient du fait que les coefficients $\alpha_f^{(sup)}$ et $\alpha_f^{(opt)}$ considérés sont différents du coefficient d'échange physique. Ce sont en effet des coefficients numériques dont la seule vocation est de stabiliser le processus itératif en s'adaptant à la finesse du maillage : plus le maillage est resserré à la paroi, plus le rapport $(T_p^{(f)} - T^*)$ est faible et plus $\alpha_f^{(sup)}$ et $\alpha_f^{(opt)}$ sont élevés. Pour amortir davantage la variation du flux convectif entre t_i et t_{i+1} , on serait tenté d'augmenter la valeur de α_f mais, dans ce cas, la condition de Fourier tendrait vers une condition de Dirichlet, ce qui bloquerait complètement les échanges thermiques entre les deux milieux.

Les deux coefficients $\alpha_f^{(sup)}$ et $\alpha_f^{(opt)}$ sont adaptés pour stabiliser un processus itératif de couplage dans lequel on cherche un état stationnaire fluide-solide mais en aucun cas à la détermination du régime transitoire de la structure. Il est donc nécessaire ici d'utiliser le coefficient d'échange physique h_f que l'on définit de la façon suivante :

$$h_f = \frac{q_p^{(f)}}{T_p^{(f)} - T_{ad}} \quad (3.6)$$

¹Les quantités $\mathcal{G}_f(t)$ sont interpolées linéairement entre $\mathcal{G}_f(t_i)$ et $\mathcal{G}_f(t_{i+1})$.

T_{ad} est la température adiabatique de frottement. Elle correspond à la température de paroi côté fluide à flux nul. La condition de raccord (3.5) devient alors, pour $t_i < t < t_{i+1}$:

$$\begin{aligned} q_p^{(s)}(t) &= -q_p^{(f)}(t) - h_f(t) \left(T_p^{(s)}(t) - T_p^{(f)}(t) \right) \\ &= h_f(t) \left(T_{ad} - T_p^{(f)}(t) \right) - h_f(t) \left(T_p^{(s)}(t) - T_p^{(f)}(t) \right) \\ &= h_f(t) \left(T_{ad} - T_p^{(s)}(t) \right) \end{aligned} \quad (3.7)$$

On constate que la condition de Fourier que nous avons considérée jusqu'à présent revient à imposer à la structure un coefficient d'échange h_f interpolé entre t_i et t_{i+1} et une température de référence T_{ad} . La condition mixte (3.7) nous permet de mieux contrôler l'élévation de la température à la paroi et ainsi d'éviter un « échauffement non physique » de celle-ci.

Résultats

Les résultats sont représentés sur la figure 3.14. On constate que les températures sont sensiblement les mêmes que celles obtenues par le calcul de référence.

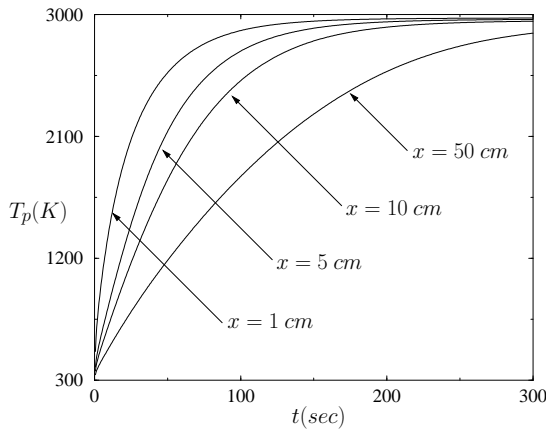


FIG. 3.14 – Profils de température par la méthode « dégradé »

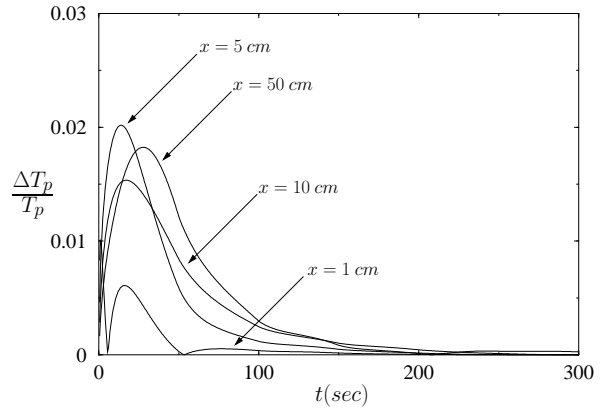


FIG. 3.15 – Écarts relatifs de température par rapport au calcul de référence

Cette tendance est confirmée si l'on regarde les écarts relatifs de température en fonction du temps représentés sur la figure 3.15 et définis par la relation (3.8).

$$\left| \frac{T_p(\text{référence}) - T_p(\text{dégradé})}{T_p(\text{référence})} \right| = \frac{\Delta T_p}{T_p} \quad (3.8)$$

Les écarts relatifs ne dépassent pas en effet 2%. On peut en déduire que l'interpolation du coefficient d'échange h_f entre les instants de couplage, c'est-à-dire toutes les 50 secondes, n'affecte quasiment pas la réponse en température de la structure. Ceci est dû à la faible variation dans

le temps du Nusselt qui se prête ainsi plus facilement aux interpolations. On constate en effet que le Nusselt interpolé issu du calcul dégradé est une bonne approximation du Nusselt de référence, comme le montre la figure 3.16. On peut certes noter, au niveau du bord d'attaque ($x = 0,5 \text{ cm}$ et $x = 1 \text{ cm}$), une erreur d'interpolation plus importante entre les deux premiers instants de couplage en raison d'une décroissance du Nusselt de référence. Cependant, cette décroissance étant assez faible par rapport au Nusselt moyen et cette erreur d'interpolation n'est pas répercutée sur les températures.

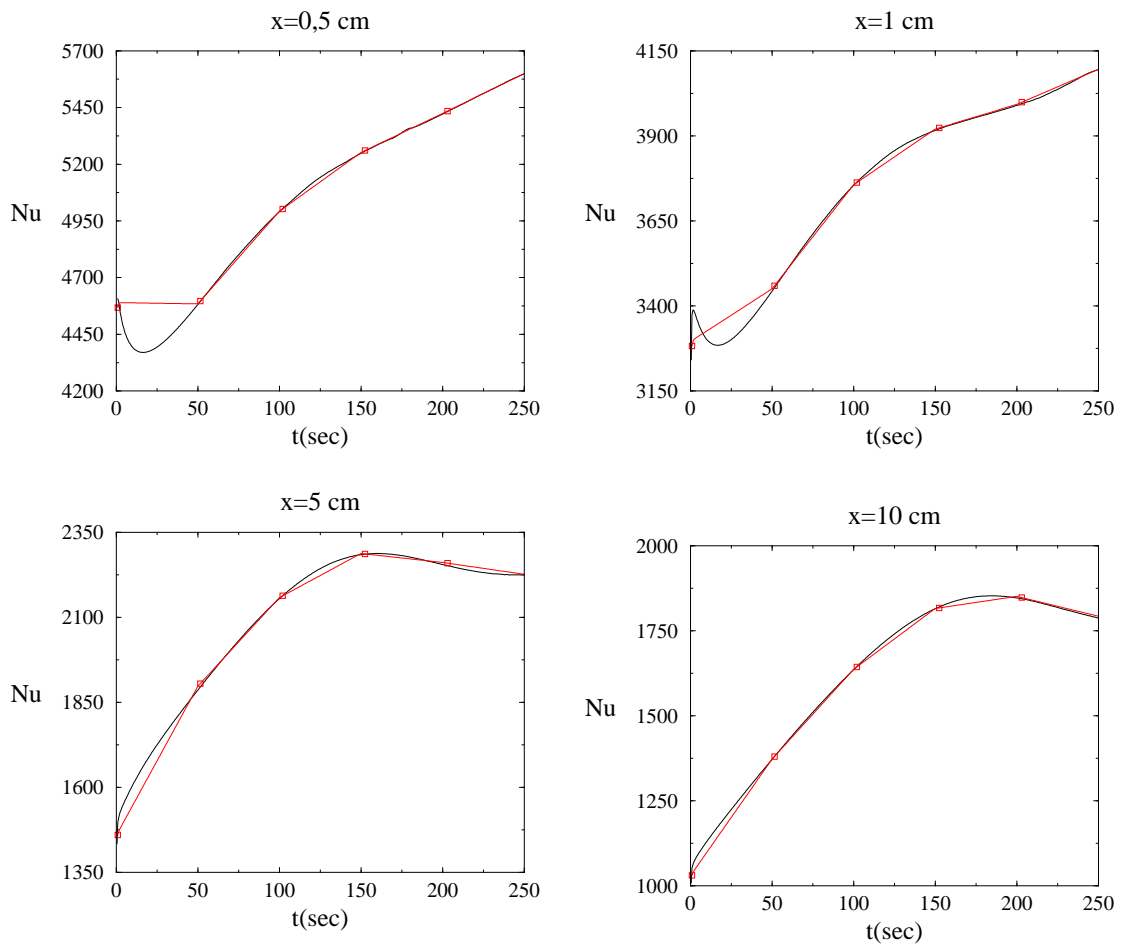


FIG. 3.16 – Comparaison des nombres de Nusselt de l'algorithme de référence (en noir) et de l'algorithme dégradé (en rouge). Les points représentent les instants de couplage.

D'autre part, nous avons représenté sur la figure 3.17 le nombre d'allers-retours ou cycles de couplage nécessaires à l'obtention à la convergence des flux et des température pour chaque instant de couplage. Pour le calcul de référence, nous avons représenté les 1000 instants de couplage et pour le calcul dégradé les 10 instants de couplage. On constate sans surprise que le nombre de cycles nécessaires pour un instant donné est plus important dans le cas du calcul dégradé. En effet, ceci est tout à fait normal dans la mesure où le temps qui sépare deux couplages successifs étant plus élevé, les variations du flux et de la température à la paroi sont plus élevées entre chaque cycle. Cependant, si l'on fait la somme de tous les cycles effec-

tués dans les deux calculs , il est clair que le cas dégradé est plus intéressant car on obtient la convergence beaucoup plus rapidement.

Nombre de cycles effectués au total :

- Calcul de référence : 2877 cycles pour 1000 instants de couplage.
- Calcul dégradé : 81 cycles pour 10 instants de couplage.

Le calcul dégradé permet de diviser par environ 35 le nombre d’allers-retours total nécessaires à l’obtention du régime transitoire de la structure, c’est-à-dire le temps de calcul total d’une simulation couplée instationnaire. En outre, la perte de précision est très faible par rapport au calcul de référence (inférieure à 2%). Ce résultat est donc très intéressant car la méthode dégradée permet d’estimer les contraintes thermiques au sein d’un système couplé sur une durée très élevée (un vol ou une mission par exemple) en minimisant de façon considérable le temps de calcul tout en maintenant une précision acceptable.

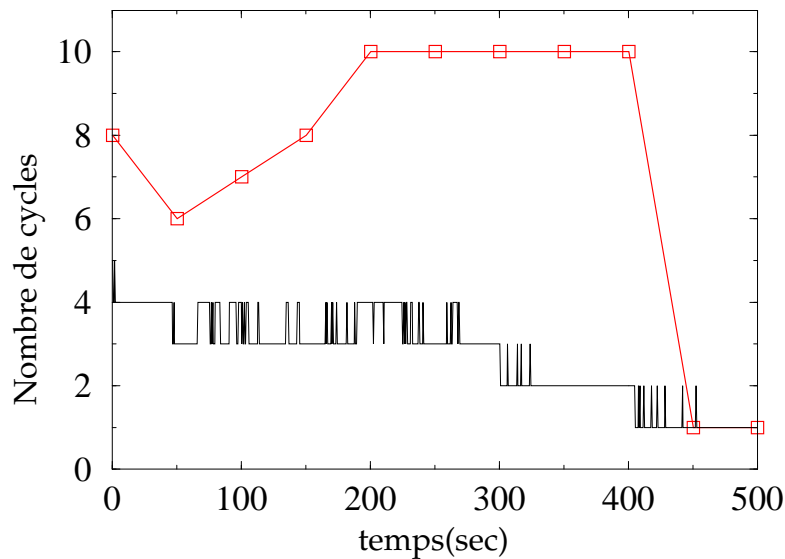


FIG. 3.17 – Nombre de cycles de couplage effectués par l’algorithme de référence (en noir) et par l’algorithme dégradé (en rouge) en fonction du temps.

3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons décrit un d’algorithme dont la particularité est la coïncidence entre les instants de couplage et les états fluides stationnaires prédéfinis par l’utilisateur. D’abord, nous avons défini un algorithme dit de référence dans lequel le nombre de couplages entre le fluide et le solide au cours du temps est égal au nombre de pas de temps de conduction dans le solide. A partir de cet algorithme, nous avons défini un algorithme dit dégradé où le nombre d’instants de couplage est toujours inférieur au nombre de pas de temps dans le solide.

Dans un premier temps, nous avons validé avec succès la méthode de référence grâce à des données expérimentales instationnaires sur la cas de la plaque plane. Dans un deuxième temps, nous avons comparé l'algorithme validé avec plusieurs algorithmes dégradés. Ces calculs de comparaison ont été effectués sur un cas laminaire et sur un cas turbulent. Les résultats ont globalement montré que la méthode dégradée était équivalente à la méthode de référence à condition toutefois de définir suffisamment d'états fluides stationnaires (i.e d'instant de couplage). Il est donc possible de diminuer le nombre de couplages fluide-solide au cours du temps sans pour autant affecter de façon significative la solution instationnaire dans la structure. En outre, le choix du type de condition de raccord est primordial d'une part dans la stabilité du processus itératif de couplage et d'autre part dans la convergence vers la solution physique. En effet, ce choix doit tenir compte de l'importance des échanges thermiques à la paroi et de la durée qui sépare deux instants de couplage successifs (période de couplage). En particulier, une condition de Neumann peut entraîner des risques d'instabilité dans le cas où des échanges thermiques élevés sont associés à une grande période d'échange. Dans ce cas précis, nous avons remplacé la condition de Neumann par une condition de Fourier associée à un coefficient d'échange physique et à une température de référence égale à la température adiabatique de frottement. Une telle condition de raccord permet en effet de contrôler les échanges entre chaque couplage et assure la convergence du processus vers une solution physiquement acceptable. En conséquence, nous préconisons l'utilisation d'une condition de Fourier dans tous les cas, ce qui évite toute analyse préalable quant au choix de la bonne condition de raccord.

Conclusion générale

Dans cette thèse, nous avons étudié le couplage thermique fluide-structure en considérant l'approche la plus générale possible. En effet, nous avons abordé le problème du point de vue couplage de codes. Cette approche qui consiste à résoudre les problèmes fluide et solide de façon indépendante a l'intérêt majeur de s'adapter d'une part aux phénomènes physiques étudiés et d'autre part au type de discrétisation employée dans chaque milieu. Cette vision du couplage nous a en effet permis de faire communiquer un code d'aérothermique de type volumes finis avec un code de mécanique des structures de type éléments finis. Le couplage entre ces deux codes a été possible grâce à l'utilisation d'un outil performant et facile à mettre en œuvre : MpCCI. L'utilisation de cette bibliothèque nous a épargné une grande partie du travail, entre autres le traitement géométrique des maillages à l'interface et la prise en charge des communications. Nous avons donc pu nous concentrer sur les méthodes de couplage proprement dites et trouver les meilleures alternatives en matière de robustesse et de stabilité numérique.

Nous avons introduit le couplage stationnaire d'une manière très simple par l'intermédiaire des méthodes de décomposition de domaine. La résolution algébrique du couplage conduction-conduction en régime permanent nous a en effet permis de mettre en évidence les matrices de couplage qui correspondent à chaque milieu. Nous avons dégagé trois types de condition de raccord qui sont Dirichlet-Neumann, Dirichlet-Fourier et Fourier-Fourier. L'étude de la convergence de ces méthodes nous a permis de conclure que celle-ci est optimale quand la matrice de couplage d'un milieu correspond au complément de Schur de l'autre milieu. En outre, nous avons pu déterminer la configuration la plus stable, à savoir que le fluide doit recevoir la température et le solide le flux de chaleur.

Cette approche algébrique a été mise en application par l'étude de la stabilité du couplage sur un modèle monodimensionnel discrétisé en différences finies. La caractérisation des modes stables de ce modèle dépend directement des coefficients de couplage à la paroi. Nous avons alors mis en évidence pour la première fois un coefficient optimal côté fluide, aussi bien en terme de stabilité qu'en terme de convergence. En particulier ce coefficient permet d'avoir une convergence bien plus rapide que celui préconisé dans la littérature. Ce dernier est en effet très élevé et pénalise la convergence en rigidifiant le système global à l'interface.

L'étude des différents types de condition de raccord nous permet de dire qu'il est plus judicieux d'utiliser une méthode de Dirichlet-Fourier plutôt qu'une méthode de Fourier-Fourier. En effet, cette dernière nous oblige à calculer le flux de chaleur pariétal côté solide, ce qui n'est pas compatible en général avec la formulation faible de l'équation de la chaleur dans sa discrétisation en éléments finis. Cette formulation est en effet basée sur la discrétisation de

la température, seule inconnue du problème. Le calcul du flux doit donc se faire a posteriori aux nœuds du maillage puis recalculé aux éléments par l'intermédiaire des fonctions d'interpolation. Une des solutions serait d'utiliser une formulation mixte dans laquelle le flux et la température sont des inconnues du problème.

Dans la dernière partie, nous avons décrit un algorithme de couplage conduction/convection instationnaire. Nous nous sommes affranchi de la grande disparité entre les temps caractéristiques dans chaque milieu en filtrant les hautes fréquences, ce qui revient à considérer le fluide comme stationnaire entre chaque instant de couplage. Cette hypothèse s'avère justifiée dans la mesure où ces instants de couplage sont déterminés par rapport au temps caractéristique dans le solide. De cette façon, l'obtention du régime transitoire dans la structure ne nécessite qu'un nombre limité de couplages dans le temps et par conséquent d'états fluides prédéfinis. En outre, une telle approche peut être adaptée à un grand nombre d'applications industrielles, en particulier quand la durée de la simulation est importante. En effet, dans ce cas, la description précise de l'écoulement fluide instationnaire est très coûteuse du point de vue numérique et pas forcément nécessaire pour déterminer la réponse thermique de la structure au cours du temps. L'algorithme de couplage général que nous avons exposé dans cette thèse permet alors de déterminer cette réponse du solide à l'aide d'une description limitée de l'écoulement à des instants choisis et caractéristiques du système étudié.

Nous avons mis en application les différentes variantes de l'algorithme général exposé sur un cas élémentaire, à savoir un écoulement instationnaire sur une plaque plane. Plus précisément, nous avons étudié deux types d'écoulement, l'un laminaire et l'autre turbulent, qui se distinguent par une plus ou moins grande variation des échanges thermiques à la paroi. Dans le cas laminaire, nous avons vu que la lente variation du flux convectif nous permettait l'emploi d'une condition de Neumann côté solide, donnant une convergence plus rapide. Nous avons observé que l'algorithme dégradé donnait de bons résultats par rapport à la référence à condition de définir suffisamment d'instant de couplage. Le cas turbulent nous a posé un problème de convergence lié à l'instationnaire dans le solide. En effet, dans le cas de l'algorithme « dégradé », la condition de Neumann dans le solide s'est avérée inapplicable à cause de l'importance du flux convectif à la paroi associée à un temps entre deux couplages très grand devant le pas de temps de conduction. Nous avons remédié à ce problème en considérant une condition de Fourier avec comme coefficient de couplage le coefficient d'échange physique. Ce type de condition de raccord nous a permis de contrôler les sollicitations thermiques du fluide par l'intermédiaire de ce coefficient et de la température adiabatique de frottement.

La conclusion que l'on peut tirer de ces deux applications est que l'utilisation d'une condition de type Fourier avec coefficient d'échange physique permet, dans tous les cas instationnaires, de s'affranchir des problèmes de stabilité éventuels liés aux conditions aérothermiques et à la période de couplage. C'est pour cette raison que l'on préconise l'utilisation de ce type de condition dans toutes les configurations couplées instationnaires. De plus la mise en œuvre d'un algorithme dégradé permet de réduire le temps de calcul de manière considérable, tout en préservant la précision des résultats. Ainsi, la méthode que nous avons décrite nous paraît être une contribution essentielle à l'étude des problèmes couplés aérothermiques instationnaires.

Les suites à donner à cette étude s'articulent autour de deux points essentiels : d'une part le

développement des méthodes de couplage présentées et d'autre part l'extension du couplage de codes à d'autres phénomènes physiques.

Du point de vue des méthodes de couplage, il faudrait poursuivre plus en détail l'étude de la méthode de type Fourier-Fourier en adaptant au préalable la discrétisation en éléments finis dans le solide. En particulier, la comparaison avec la méthode de Dirichlet-Fourier du point de vue de la rapidité de convergence serait intéressante. En outre, nous avons rencontré quelques problèmes au niveau des interpolations bilinéaires effectuées par MpCCI dans le cas où les tailles de mailles côté fluide et solide sont très différentes. Ce point pourrait être amélioré en définissant au préalable sur chaque maillage une grille intermédiaire raffinée et d'y intégrer les quantités à échanger.

Le deuxième point est l'étude de systèmes plus complexes dans lesquels interviennent d'autres phénomènes physiques. La grande souplesse du couplage de codes permet une telle étude. La première chose à faire est d'étendre le problème couplé aérothermique à un problème aérothermo-mécanique, en d'autres termes, d'intégrer au système les déformations de la structure qui accompagnent souvent les interactions thermiques. On pense également au couplage conduction-convection-rayonnement qui intervient en combustion ou les phénomènes de pyrolyse, d'ablation dans les systèmes de propulsion solide. La mise en œuvre pratique de ces couplages nécessite l'utilisation a priori de plus de deux codes de calcul, ce qui est très simple à réaliser avec la bibliothèque MpCCI.

Annexe A

Etude théorique de la plaque plane

Nous considérons un écoulement laminaire en convection forcée, incompressible et sans gradient de pression. La conduction dans la plaque est supposée unidirectionnelle (FIG. A.1).

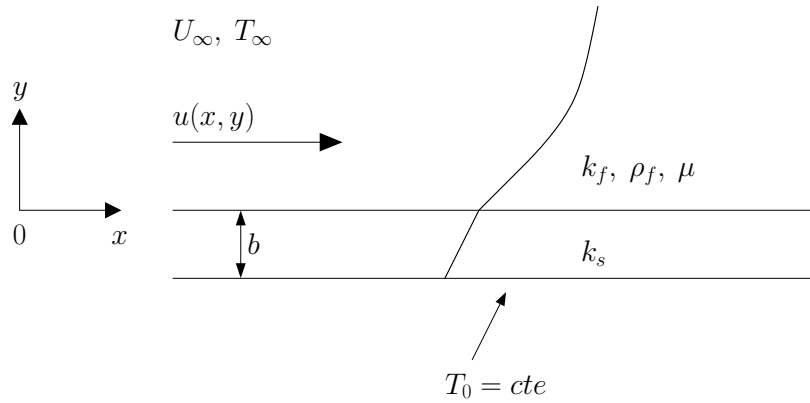


FIG. A.1 – Géométrie du problème

A.1 Problème de Blasius

L'équation de la couche limite s'écrit :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (\text{A.1})$$

La solution de l'équation dynamique (A.1) est donnée par Blasius[4]. On considère la fonction de courant ψ telle que :

$$\psi = \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}} f(\eta) \quad \text{avec} \quad \eta = y \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}} \quad (\text{A.2})$$

Les composantes de la vitesse s'écrivent alors :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = U_{\infty} f'(\eta) \quad (\text{A.3})$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu U_{\infty}}{x}} (\eta f' - f) \quad (\text{A.4})$$

L'équation (A.1) se transforme en une équation différentielle :

$$f f'' + 2f' = 0,$$

à laquelle sont associées les conditions :

$$f(0) = f' = 0 \quad (\text{A.5})$$

$$f'(\infty) = 1 \quad (\text{A.6})$$

A.2 Problème thermique

On considère l'équation de convection :

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (\text{A.7})$$

D'autre part, l'équation de la conduction dans la paroi se résume à l'équation de Laplace :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

On en déduit la densité de flux à la paroi :

$$q(x) = k_s \frac{T(x, 0) - T_0}{b}$$

L'égalité des flux à la paroi impose alors la condition de couplage :

$$k_s \frac{T(x, 0) - T_0}{b} = k_f \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (\text{A.8})$$

Le problème thermique se résume donc à la résolution de l'équation (A.7) avec la condition de couplage (A.8) à la paroi.

On pose

$$\theta = \frac{T - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}}$$

et on admet que $\theta(x, \eta)$ est une fonction des deux variables indépendantes x et η . La condition (A.8) prend alors la forme :

$$\theta(x, 0) = 1 + \frac{k_f}{k_s} b \left(\frac{\nu x}{U_\infty} \right)^{-\frac{1}{2}} \theta'_\eta(x, 0) \quad (\text{A.9})$$

Cette expression suggère la recherche d'une solution de la forme :

$$\theta(x, \eta) = \theta_0(\eta) + \varphi(x) \theta_1(\eta) \quad (\text{A.10})$$

De plus, en remplaçant $\theta(x, \eta)$ dans (A.7), l'équation à résoudre s'écrit :

$$u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \left(\frac{\nu x}{U_\infty} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = a \left(\frac{\nu x}{U_\infty} \right)^{-1} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2}, \quad (\text{A.11})$$

en tenant compte de la condition (A.9) d'une part et de la condition $\theta(x, \eta \rightarrow \infty) = 0$ d'autre part.

Le report des équations (A.3), (A.4) et (A.10) dans (A.11) conduit à l'équation différentielle ($x \neq 0$) :

$$\left(\theta''_0 + \frac{1}{2} Pr f \theta'_0 \right) + \varphi \left[\theta''_1 + Pr \left(\frac{f}{2} \theta'_1 - \frac{x \varphi'}{\varphi} f' \theta_1 \right) \right] = 0 \quad (\text{A.12})$$

dans laquelle les accentuations symbolisent les dérivées par rapport à η pour f , θ_0 , θ_1 et par rapport à x pour φ . Les variables θ_0 et θ_1 étant indépendantes, cette équation peut être décomposée en deux autres :

$$\theta''_0 + \frac{1}{2} Pr f \theta'_0 = 0, \quad (\text{A.13})$$

associée aux conditions

$$\theta_0(0) = 1 ; \theta_0(\infty) = 0, \quad (\text{A.14})$$

et

$$\theta''_1 + Pr \left(\frac{f}{2} \theta'_1 - \frac{x \varphi'}{\varphi} f' \theta_1 \right) = 0, \quad (\text{A.15})$$

avec les conditions

$$\theta_1(0) = \theta'_\eta(x, 0) ; \theta_1(\infty) = 0. \quad (\text{A.16})$$

Les conditions aux limites (A.14) et (A.16) doivent vérifier celles qui sont associées à l'équation (A.11) et en particulier la condition de couplage (A.9). L'examen de (A.16) montre qu'il faut $\theta_\eta(x, 0)$ indépendant de x puisque θ_1 l'est. Par dérivation de (A.10), ceci exige :

$$\theta'_1(0) = 0, \quad (\text{A.17})$$

et donc

$$\theta_1(0) = \theta'_0(0). \quad (\text{A.18})$$

Le problème ainsi décomposé conduit à une solution analytique simple.

L'équation (A.13) a été résolue par Pohlhausen[51] :

$$\theta_0(\eta) = A \int_{\eta}^{\infty} \left[\left(f''(\eta) \right)^{Pr} \right] d\eta, \quad A = \left[\int_0^{\infty} \left[f''(\eta) \right]^{Pr} d\eta \right]^{-1} \quad (\text{A.19})$$

On peut admettre que $\theta'_0 = A \left[f''(\eta) \right]^{Pr}$ est représentable, selon le domaine des valeurs de Pr , par les expressions suivantes :

- $0,332Pr^{\frac{1}{3}}$ pour $0,6 \leq Pr \leq 15$;
- $0,564Pr^{\frac{1}{2}}$ pour $Pr \rightarrow 0$;
- $0,339Pr^{\frac{1}{3}}$ pour $Pr \rightarrow \infty$.

La condition à l'interface (A.9), l'expression (A.10) avec les conditions (A.14), (A.17) et (A.18) conduisent à :

$$\varphi(x) = \frac{k_f}{k_s} b \left(\frac{\nu x}{U_{\infty}} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{A.20})$$

Par conséquent, $\frac{x\varphi'}{\varphi} = -\frac{1}{2}$ et l'équation (A.15) devient :

$$\theta_1'' + \frac{1}{2}Pr(f\theta_1)' = 0,$$

avec les conditions aux limites :

$$\begin{aligned} \theta_1(0) &= \theta'_0 = A[f''(0)]^{Pr} \\ \theta_1(\infty) &= 0 \end{aligned}$$

On en déduit la solution générale :

$$\theta_1(\eta) = \left[K \int_{\eta}^{\infty} e^{\left(\frac{1}{2}Pr \int_0^{\eta} f d\eta\right)} d\eta + C \right] e^{\left(-\frac{1}{2}Pr \int_0^{\eta} f d\eta\right)} \quad (\text{A.21})$$

K et C sont des constantes déterminées à l'aide des conditions aux limites.

En effet, sachant que :

$$\int_0^\eta f(\eta) d\eta = \eta + cte \quad \text{pour } \eta > 6,$$

la constante K ne peut être que nulle. D'autre part, $C = A[f''(0)]^{Pr}$.

On en déduit finalement la solution complète :

$$\theta(x, \eta) = \theta_0(\eta) - \frac{k_f b}{k_s x} Re_x^{\frac{1}{2}} A [f''(0)]^{Pr} e^{(-\frac{1}{2} Pr \int_0^\eta f d\eta)} \quad \text{avec } Re_x = \frac{U_\infty x}{\nu} \quad (\text{A.22})$$

et en particulier, pour $0,6 < \eta < 15$:

$$\theta(x, \eta) = \theta_0(\eta) - 0,332 Br_x e^{(-\frac{1}{2} Pr \int_0^\eta f d\eta)}, \quad (\text{A.23})$$

De l'équation (A.23), on déduit la température à la paroi, pour $x \neq 0$:

$$\theta(x, 0) = 1 - 0.332 Br_x \quad (\text{A.24})$$

Annexe B

Etude de stabilité

B.1 Modèle Dirichlet-Fourier

On part du système discrétisé fluide-solide avec les conditions de raccord de Dirichlet-Fourier à l'interface :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\rho C_f \Delta x_f}{\Delta t} (T_j^{n+1} - T_j^n) = \frac{k_f}{\Delta x_f} (T_{j+1}^{n+1} - 2T_j^{n+1} + T_{j-1}^{n+1}) & \text{si } j > 0 \quad (\text{B.1}) \\ T_{0+}^{n+1} = T_{0-}^n & \text{si } j = 0_+ \quad (\text{B.2}) \\ T_{j+1}^{n+1} - 2T_j^{n+1} + T_{j-1}^{n+1} = 0 & \text{si } j < 0 \quad (\text{B.3}) \\ \frac{k_s}{\Delta x_s} (T_{0-}^{n+1} - T_{-1}^{n+1}) + \alpha_f T_{0-}^{n+1} = \frac{2k_f}{\Delta x_f} (T_1^{n+1} - T_{0+}^{n+1}) + \alpha_f T_{0+}^{n+1} & \text{si } j = 0_- \quad (\text{B.4}) \end{array} \right.$$

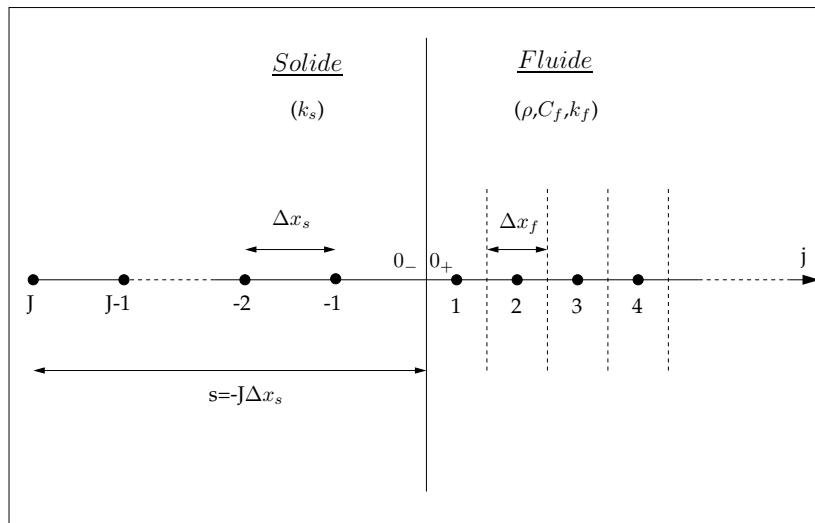


FIG. B.1 – Discretisation du problème couplé

La relation (B.1) est la discrétisation en différences finies de l'équation de la chaleur transitoire dans le fluide. La relation (B.3) est la discrétisation de l'équation de la chaleur en régime per-

manent dans le solide. Les relations (B.2) et (B.4) correspondent aux conditions de raccord à l'interface. Les notations utilisées sont celles de la figure B.1.

Condition aux limites extérieure

La résolution de l'équation de la chaleur stationnaire côté solide nous permet d'imposer une condition extérieure en $j = J$ pour fermer le problème. On a le choix entre trois conditions aux limites :

- condition de Dirichlet : $T_J^n = T_{ext}$
- condition de Neumann : $\frac{-k_s}{\Delta x_s}(T_{J+1}^n - T_J^n) = q_{ext}$
- condition mixte : $\frac{-k_s}{\Delta x_s}(T_{J+1}^n - T_J^n) = \alpha_{ext}(T_J^n - T_{ext})$

Dans le cas d'une condition extérieure de Dirichlet, on montre facilement, d'après l'équation de conservation du flux de chaleur (B.3) :

$$\frac{1}{J-1}(T_{-1}^n - T_{ext}) = \frac{1}{J}(T_{0-}^n - T_{ext})$$

En remplaçant les relations (B.2) et (B.5) dans la condition de raccord (B.4) on obtient le système :

$$\begin{cases} T_j^{n+1} - T_j^n = \frac{k_f \Delta t}{\rho C_f \Delta x_f^2} (T_{j+1}^{n+1} - 2T_j^{n+1} + T_{j-1}^{n+1}) & \text{si } j > 0 \\ \left(\frac{k_s}{s} + \alpha_f \right) T_{0-}^{n+1} = \left(\frac{k_s}{s} T_{ext} + \frac{2k_f}{\Delta x_f} T_1^{n+1} \right) - \left(\frac{2k_f}{\Delta x_f} - \alpha_f \right) T_{0-}^n & \\ T_{j+1}^{n+1} - 2T_j^{n+1} + T_{j-1}^{n+1} = 0 & \text{si } j < 0 \end{cases} \quad (B.5)$$

On retrouve dans la deuxième équation du système (B.5) le problème de Fourier du paragraphe II.1.2 avec les correspondances :

$$\begin{cases} S^{(s)} = \frac{k_s}{s} \\ A^{(f)} = \alpha_f \\ S^{(f)} = \frac{2k_f}{\Delta x_f} \\ C = \frac{k_s}{s} T_{ext} + \frac{2k_f}{\Delta x_f} T_1^{n+1} \end{cases}$$

Le principe de base de la théorie GKS[34] est la recherche de modes normaux instables de la forme :

$$T_j^n = \kappa^j z^n, \quad (B.6)$$

où z et κ sont complexes et correspondent respectivement aux facteurs d'amplification temporel et spatial. Plus précisément, les modes normaux du système couplé étudié sont ceux définis par Giles[28] et Godunov[30] :

$$T_j^n = \begin{cases} \kappa_s^j z^n & \text{si } j=0_{-}, -1, -2, -3, \dots \\ \kappa_f^j z^{n-1} & \text{si } j=0_{+}, 1, 2, 3, \dots, \end{cases}$$

κ_s et κ_f sont respectivement les facteurs d'amplification côté solide et côté fluide.

Si l'on remplace ces modes dans le système (B.5), on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \kappa_f^2 - \left(2 + \frac{z-1}{Dz}\right) \kappa_f + 1 = 0 & \text{si } j > 0 \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

$$\begin{cases} z = \frac{\frac{2k_f}{\Delta x_f} \kappa_f - \frac{2k_f}{\Delta x_f} - \alpha_f}{\frac{k_s}{s} + \alpha_f} & \text{si } j = 0_{-} \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

$$\begin{cases} \kappa_s^2 - 2\kappa_s + 1 = 0 & \text{si } j < 0 \end{cases} \quad (\text{B.9})$$

où $D = \frac{k_f \Delta t}{\rho C_f \Delta x_f^2}$ est le nombre de Fourier.

La relation (B.2) est automatiquement satisfaite par le choix des modes normaux. On remarque également que la condition à l'interface (B.8) est indépendante de κ_s à cause de l'utilisation de la condition extérieure de Dirichlet. On se ramène donc à l'étude de la stabilité du schéma implicite du fluide (B.7) associé à la la condition aux limites (B.8) qui est fonction des propriétés physiques des deux milieux. Elle dépend également du coefficient local α_f calculé dans le fluide et dont on aimerait connaître l'influence sur la stabilité globale du couplage.

L'équation caractéristique (B.7) admet deux solutions κ_f^- et κ_f^+ telles que :

$$\kappa_f^{\pm} = \frac{1}{2} \left(2 + \frac{z-1}{Dz} \pm \sqrt{\left(2 + \frac{z-1}{Dz}\right)^2 - 4} \right) \quad (\text{B.10})$$

Cependant, pour caractériser complètement les solutions, il faut tenir compte de la racine carrée qui présente également deux solutions. En effet, si l'on pose :

$$\mathcal{Z} = \left(2 + \frac{z-1}{Dz}\right)^2 - 4 = \mathcal{X} + i\mathcal{Y}$$

on obtient :

$$\sqrt{\mathcal{Z}} = \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{\mathcal{X}^2 + \mathcal{Y}^2} + \mathcal{X}}{2}} + i \operatorname{sgn}(\mathcal{Y}) \sqrt{\frac{\sqrt{\mathcal{X}^2 + \mathcal{Y}^2} - \mathcal{X}}{2}} \right) = \pm \mathcal{Z}'$$

d'où

$$\begin{aligned}\kappa_f^+ &= \frac{1}{2} \left(2 + \frac{z-1}{Dz} + (\pm \mathcal{Z}') \right) \\ \kappa_f^- &= \frac{1}{2} \left(2 + \frac{z-1}{Dz} - (\pm \mathcal{Z}') \right)\end{aligned}$$

En définitive, on a deux solutions que l'on note κ et μ et qui s'écrivent :

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{1}{2} \left(2 + \frac{z-1}{Dz} + \mathcal{Z}' \right) \\ \kappa &= \frac{1}{2} \left(2 + \frac{z-1}{Dz} - \mathcal{Z}' \right)\end{aligned}$$

Si l'on veut vérifier la condition $\kappa_f \rightarrow 0$ quand $j \rightarrow \infty$, on doit avoir obligatoirement $|\kappa_f| < 1$. Or, Gustafsson, Kreiss, Sundström[34] ou encore Trefethen[58][59] ont montré que, pour $|z| > 1$, il existe toujours une racine de module supérieur à 1 et une racine de module inférieur à 1. Sur la figure B.2, on a représenté les modules de κ et μ en fonction de z avec $|z| > 1$ et pour plusieurs valeurs de D . On constate que, quelle que soit la valeur de D , le module de κ est toujours inférieur à 1 et le module de μ est toujours supérieur à 1. La solution recherchée est donc κ . Si l'on remplace κ_f par κ dans la relation (B.8), on obtient l'équation suivante :

$$z = \frac{\frac{2k_f}{\Delta x_f}}{\frac{k_s}{s} + \alpha_f} \kappa(D, z) - \frac{\frac{2k_f}{\Delta x_f} - \alpha_f}{\frac{k_s}{s} + \alpha_f} \quad (\text{B.11})$$

Le couplage est stable s'il n'existe aucun z tel que $|z| > 1$ solution de l'équation (B.11). Cela revient à montrer que, pour $|z| > 1$:

$$|g(z)| = \left| \frac{\frac{2k_f}{\Delta x_f}}{\frac{k_s}{s} + \alpha_f} \kappa - \frac{\frac{2k_f}{\Delta x_f} - \alpha_f}{\frac{k_s}{s} + \alpha_f} \right| < 1 \quad (\text{B.12})$$

B.2 Modèle Fourier-Fourier

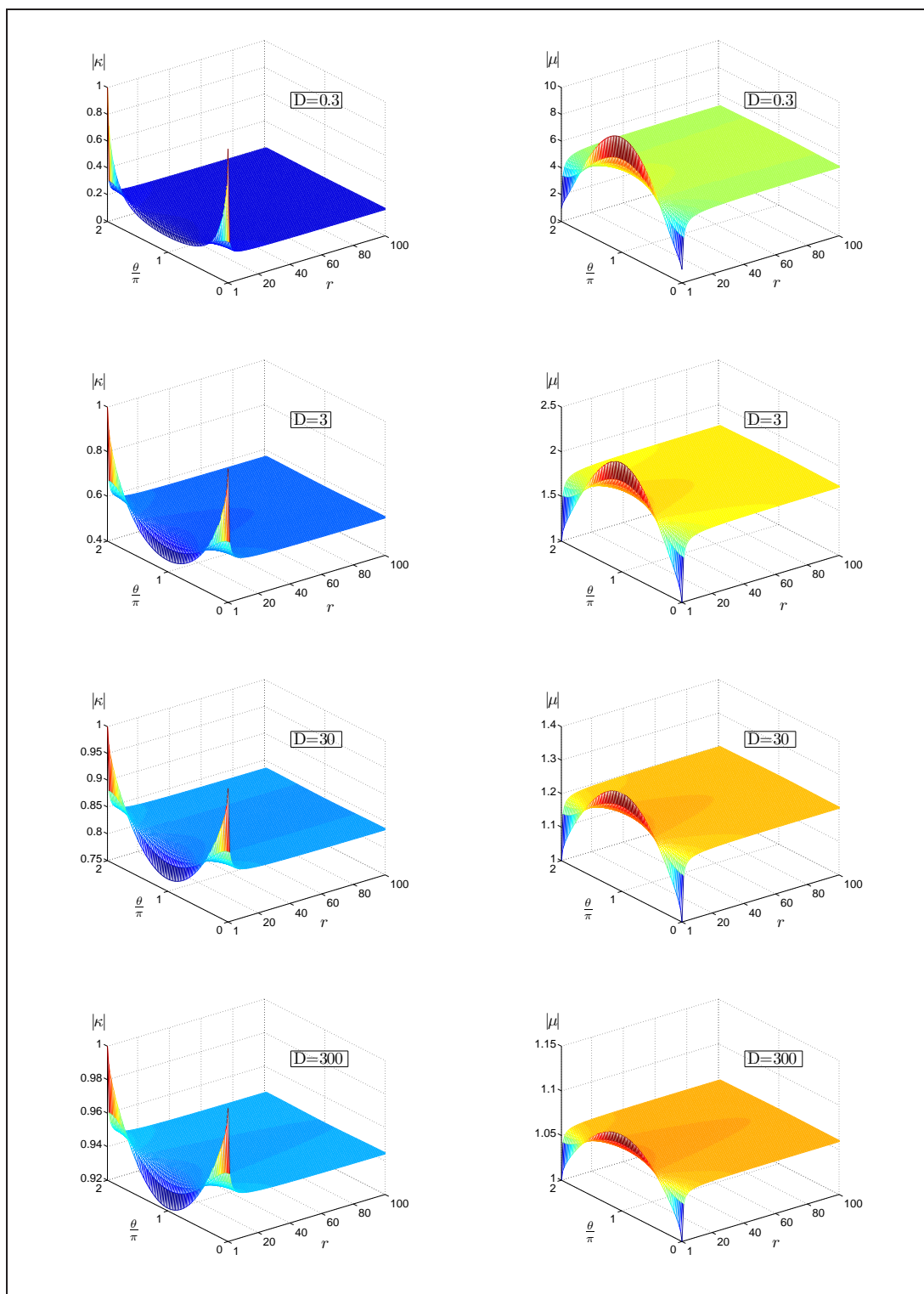
Le système discrétisé avec les conditions de Fourier-Fourier s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{\rho C_f \Delta x_f}{\Delta t} (T_j^{n+1} - T_j^n) = \frac{k_f}{\Delta x_f} (T_{j+1}^{n+1} - 2T_j^{n+1} + T_{j-1}^{n+1}) & \text{si } j > 0 \end{cases} \quad (\text{B.13})$$

$$\begin{cases} \frac{2k_f}{\Delta x_f} (T_{0+}^{n+1} - T_1^{n+1}) + \alpha_s T_{0+}^{n+1} = \frac{-k_s}{\Delta x_s} (T_{0-}^n - T_{-1}^n) + \alpha_s T_{0-}^n & \text{si } j = 0_+ \end{cases} \quad (\text{B.14})$$

$$\begin{cases} T_{j+1}^{n+1} - 2T_j^{n+1} + T_{j-1}^{n+1} = 0 & \text{si } j < 0 \end{cases} \quad (\text{B.15})$$

$$\begin{cases} \frac{k_s}{\Delta x_s} (T_{0-}^{n+1} - T_{-1}^{n+1}) + \alpha_f T_{0-}^{n+1} = \frac{-2k_f}{\Delta x_f} (T_{0+}^{n+1} - T_1^{n+1}) + \alpha_f T_{0+}^{n+1} & \text{si } j = 0_- \end{cases} \quad (\text{B.16})$$

FIG. B.2 – Modules de κ et μ en fonction de $z = re^{i\theta}$ pour $r > 1$

En utilisant une condition extérieure de Dirichlet, on obtient, en réarrangeant les conditions de raccord :

$$\begin{cases} T_j^{n+1} - T_j^n = \frac{k_f \Delta t}{\rho C_f \Delta x_f^2} (T_{j+1}^{n+1} - 2T_j^{n+1} + T_{j-1}^{n+1}) & \text{si } j > 0 \\ \left(\frac{2k_f}{\Delta x_f} + \alpha_s \right) T_{0+}^{n+1} = \left(\frac{k_s}{s} T_{ext} + \frac{2k_f}{\Delta x_f} T_1^{n+1} \right) - \left(\frac{2k_f}{\Delta x_f} - \alpha_s \right) T_{0-}^n \\ \left(\frac{k_s}{s} + \alpha_f \right) T_{0-}^{n+1} = \left(\frac{k_s}{s} T_{ext} + \frac{2k_f}{\Delta x_f} T_1^{n+1} \right) - \left(\frac{2k_f}{\Delta x_f} - \alpha_f \right) T_{0+}^{n+1} \\ T_{j+1}^{n+1} - 2T_j^{n+1} + T_{j-1}^{n+1} = 0 & \text{si } j < 0 \end{cases} \quad (\text{B.17})$$

Par analogie avec l'étude de stabilité précédente, on cherche les modes normaux instables de la forme :

$$T_j^n = \begin{cases} \kappa_s^j z^n & \text{si } j=0_-, -1, -2, \dots \\ \kappa_f^j z^{n-1} & \text{si } j=0_+, 1, 2, \dots, \end{cases}$$

En remplaçant ces modes dans le système discrétisé (B.17) on obtient :

$$\begin{cases} \kappa_f^2 - \left(2 + \frac{z-1}{Dz} \right) \kappa_f + 1 = 0 & \text{si } j > 0 \end{cases} \quad (\text{B.18})$$

$$\begin{cases} z = \frac{\frac{2k_f}{\Delta x_f}}{\frac{k_s}{s} + \alpha_f} \left(1 - \frac{\frac{2k_f}{\Delta x_f} - \alpha_f}{\frac{2k_f}{\Delta x_f} + \alpha_s} \right) \kappa_f + \frac{\left(\frac{2k_f}{\Delta x_f} - \alpha_f \right) \left(\frac{k_s}{s} - \alpha_s \right)}{\left(\frac{2k_f}{\Delta x_f} + \alpha_s \right) \left(\frac{k_s}{s} + \alpha_f \right)} & \end{cases} \quad (\text{B.19})$$

$$\begin{cases} \kappa_s^2 - 2\kappa_s + 1 = 0 & \text{si } j < 0 \end{cases} \quad (\text{B.20})$$

L'équation (B.18) donnant la même solution κ que dans le cas Dirichlet-Fourier, on aboutit finalement à la condition de stabilité suivante :

$$|g(z)| = \left| \frac{\frac{2k_f}{\Delta x_f}}{\frac{k_s}{s} + \alpha_f} \left(1 - \frac{\frac{2k_f}{\Delta x_f} - \alpha_f}{\frac{2k_f}{\Delta x_f} + \alpha_s} \right) \kappa + \frac{\left(\frac{2k_f}{\Delta x_f} - \alpha_f \right) \left(\frac{k_s}{s} - \alpha_s \right)}{\left(\frac{2k_f}{\Delta x_f} + \alpha_s \right) \left(\frac{k_s}{s} + \alpha_f \right)} \right| < 1$$

Annexe C

Fonctionnement de MpCCI

La bibliothèque MpCCI intervient de deux façons dans l'algorithme de couplage.

Dans un premier temps, elle permet d'effectuer un traitement géométrique de l'interface de couplage en associant les éléments et les nœuds des maillages couplés. Ce travail est effectué grâce à une série d'algorithmes de recherche géométrique que l'on appelle aussi algorithmes de pré-contact géométrique.

Dans un deuxième temps, elle prend en charge le transfert des données en effectuant des interpolations déduites du traitement géométrique. Le type d'interpolation dépend de la nature des données échangées (grandeur conservative ou non-conservative).

C.1 Structure

La structure de MpCCI est composée de trois grandes parties : l'initialisation, le calcul et le contrôle du calcul. Nous exposons ici les fonctions les plus importantes. L'ensemble des fonctions de MpCCI est donné dans [1].

Initialisation

Ces fonctions définissent la ou les surfaces couplées, les nœuds et les éléments correspondants ainsi que les partitions éventuelles. On définit également les points de rencontre entre les codes appelés points de synchronisation.

- chaque surface couplée est identifiée par un entier choisi au hasard par l'utilisateur et correspond à la variable `MeshId`. Les partitions sont, quant à elles, identifiées par la variable `PartId`. On définit alors la fonction qui permet de découper la surface couplée `MeshId` en partitions `PartId` (FIG. C.1).

```
CCI_Def_partition(int MeshId, int PartId)
```

<code>MeshId</code>	Numéro de la surface couplée
<code>PartId</code>	Numéro de partition

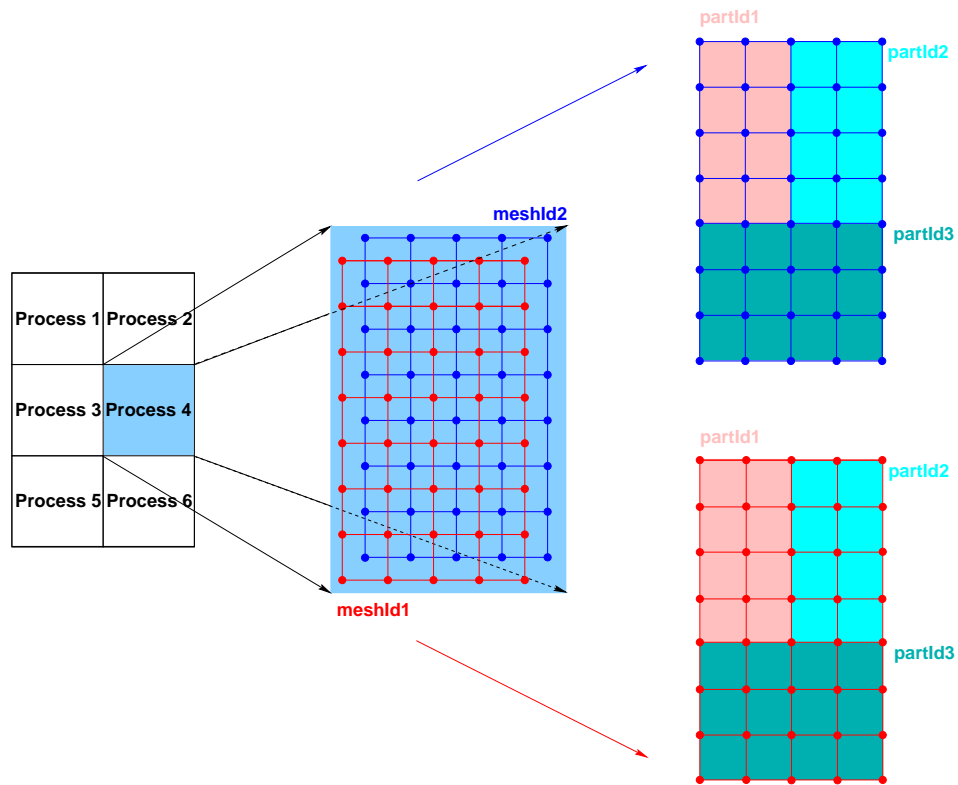


FIG. C.1 – Découpage des surfaces couplées en partitions

- on définit ensuite les nœuds et les éléments de chaque partition grâce aux fonctions `CCI_Def_nodes` et `CCI_Def_Elems`.

```
CCI_Def_nodes(int MeshId, int PartId,
              int GlobalDim, int nNodes,
              const int nodeIds[], const void* coords,...)
```

```
CCI_Def_elems(int MeshId, int PartId, int nElems,
              const int elemIds[], nNodesPerElem[],...)
```

<code>GlobalDim</code>	Dimension du système de coordonnées
<code>nNodes</code>	Nombre de nœuds
<code>nodeIds</code>	Numéro du nœud
<code>coords</code>	Coordonnées des nœuds
<code>nElems</code>	Nombre d'éléments
<code>elemIds</code>	Numéro de l'élément
<code>NodesPerElem</code>	Nombre de nœuds par élément

- les points de synchronisation sont définis à l'aide de la fonction :

```
CCI_Def_sync_point(int syncPointId,
                  int nQuantitiesToSend,
                  const int quantitiesToSend[],
                  int meshIdsToSend,
                  int nQuantitiesToRecv,
                  const int quantitiesToRecv[],
                  int meshIdsToRecv,...)
```

syncPointId	Numéro du point de synchronisation
nQuantitiesToSend	Nombre de quantités à envoyer
quantitiesToSend	Numéros des quantités à envoyer
meshIdsToSend	Surface(s) couplée(s) émettrice(s)
nQuantitiesToRecv	Nombre de quantités à recevoir
quantitiesToRecv	Numéros des quantités à recevoir
meshIdsToRecv	Surface(s) couplée(s) réceptrice(s)

Un point de synchronisation est une zone de communication définie par l'utilisateur et dans laquelle un ou plusieurs échanges de données ont lieu entre les codes. On peut définir autant de points de synchronisation que l'on veut. On a également la possibilité, pour un point de synchronisation donné, d'effectuer des échanges réciproques ou non.

Calcul

C'est la phase principale du couplage. Les fonctions appelées ici contrôlent l'envoi et la réception des données, le déclenchement des échanges ainsi que l'état de convergence du calcul.

- préparation des données : le rôle des fonctions ci-dessous est de définir la localisation des données à envoyer (Put_nodes, Put_elems) et à recevoir (Get_nodes, Get_elems). Ces données peuvent être nodales ou intégrées sur chaque élément.

```
CCI_Put_nodes(int MeshId, int PartId,
              int quantityId, const void* values,...)

CCI_Put_elems(int MeshId, int PartId,
              int quantityId, const void* values,...)

CCI_Get_nodes(int MeshId, int PartId,
              int quantityId, const void* values,...)

CCI_Get_elems(int MeshId, int PartId,
              int quantityId, const void* values,...)
```

quantityId	Numéro de la quantité à envoyer
values	Valeurs retournées

- Déclenchement d'un échange : on appelle un point de synchronisation donné. Celui-ci est associé aux quantités définies dans `CCI_Def_sync_point` :

<code>CCI_Reach_sync_point(int syncPointId, CCI_status* status)</code>	
<code>status</code>	Structure ou tableau contenant les informations sur les quantités à échanger

- Test de convergence du calcul couplé :

<code>CCI_Check_convergence(int myConvergence, int* globalConvergence, int comm)</code>	
<code>myConvergence</code>	Etat de convergence local
<code>globalConvergence</code>	Etat de convergence global
<code>comm</code>	Communicateur

Cette fonction définit une zone de communication `comm` dans laquelle chaque code donne son état de convergence local `myConvergence` à partir desquels on définit un état de convergence global qui permet de stopper ou non le calcul.

Contrôle du calcul

Le rôle des fonctions de contrôle est de lire le contenu du fichier de données. Elles permettent également à l'utilisateur d'extraire et de lire certains paramètres du couplage.

- Création de variables utilisateurs :

<code>CCI_Parameter_info(const char* idString, int valueDataType, void* value, int* flag)</code>	
<code>idString</code>	Nom de la variable
<code>valueDataType</code>	Type de la variable
<code>value</code>	Valeur retournée

L'utilisateur peut définir ses propres variables relatives au couplage. Celles-ci sont déclarées dans le fichier de données `MpCCI`. De façon plus générale, la fonction `CCI_General_info` permet d'extraire n'importe quelle variable existante.

C.2 Algorithmes de recherche géométrique

Il existe dans MpCCI trois types d'algorithme géométrique :

- « Point-Element Relationships » (PE) : on associe les points du premier maillage aux points du deuxième. Le terme « point » désigne ici soit un nœud du maillage ou le centre d'un élément de surface. Dans ce type d'algorithme, on cherche donc des relations de voisinage entre nœuds et éléments des surfaces couplées.
- « Element-Element Relationships » (EE) : pour un élément E donné du maillage 1, on cherche tous les éléments du maillage 2 ayant une zone commune avec E.
- « Point-Point Relationships » (PP) : on associe ici directement les nœuds de chacun des maillages. Ce type de méthode n'est possible qu'avec des maillages coïncidents.

Nous nous intéressons ici à l'algorithme (PE) qui va nous permettre d'associer les éléments (i.e les nœuds au centre) du maillage fluide aux nœuds du maillage structure.

Le traitement géométrique se déroule en deux phases. La première consiste à faire une recherche de correspondance entre les nœuds et les éléments des deux maillages : c'est le pré-contact géométrique. La deuxième permet de faire une sélection plus fine des nœuds et des éléments qui vont participer au couplage. Cette sélection s'effectue à l'aide d'une formule mathématique appelée critère de rejet.

C.2.1 Le pré-contact géométrique

MpCCI fait une première recherche géométrique dans laquelle il détermine, pour chaque point p du maillage n°1, les éléments du maillage n°2 les plus proches. Plus précisément, on définit, autour de chaque élément du maillage n°2, des boîtes (« bounding boxes ») comme sur la figure C.2. Elles délimitent une zone que l'utilisateur peut faire varier et dans laquelle on cherche des points du maillage n°1.

C.2.2 Critère de rejet

La procédure est représentée sur la figure FIG. C.3. Pour chaque élément sélectionné précédemment, MpCCI détermine, grâce à une formule mathématique appelée critère de rejet (voir relation (C.1)), quels sont ceux qui doivent être effectivement conservés pour effectuer des échanges avec le point p . Notons que les éléments des maillages sont préalablement découpés en triangles par MpCCI.

Pour un élément du maillage n°2 ΔABC donné, l'idée est de trouver un point p'' appartenant au triangle ΔABC tel que la distance $\|p - p''\|$ soit minimale. Pour cela, on projette d'abord le point p , appartenant au maillage n°1, perpendiculairement au plan de l'élément ΔABC et on définit la distance normale $d_n = \|p - p'\|$ (d_n vaut zero si les surfaces couplées sont confondues) puis on projette p' sur l'élément ΔABC et on définit la distance tangentielle $d_t = \|p' - p''\|$.

A partir de ces données, on considère que l'élément ΔABC du maillage n°2 est couplé avec le point p du maillage n°1 si le critère suivant est vérifié :

$$\theta_1 (|u| + |v| + |w| - 1) + \theta_2 \frac{d_n^2}{|\Delta ABC|} + \theta_3 \frac{d_t^2}{|\Delta ABC|} > \tau_{tol} \quad (C.1)$$

u, v, w sont les coordonnées barycentriques de p'' dans le triangle ΔABC . $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ et τ_{tol} sont des réels donnés par l'utilisateur. Si ces paramètres sont faibles, seuls les éléments les plus proches de p seront retenus et les autres ne participeront pas au couplage.

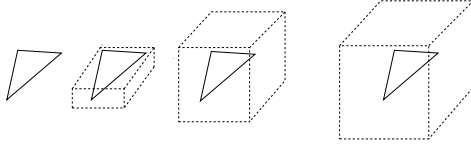


FIG. C.2 – *Pré-contact géométrique*

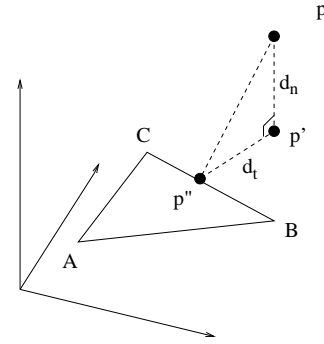


FIG. C.3 – *Projection des points*

Annexe D

Algorithmes de couplage instationnaire

Nous allons détailler les algorithmes instationnaires dans le cas général puis dans le cas particulier en précisant les conditions aux limites utilisées. La description de chaque algorithme est effectuée en utilisant les conditions de raccord générales, à savoir celles de Fourier-Fourier. Elles s'écrivent sous la forme générique :

$$q_p^{(f)} + \alpha_s T_p^{(f)} = -q_p^{(s)} + \alpha_s T_p^{(s)} \quad (\text{D.1})$$

$$q_p^{(s)} + \alpha_f T_p^{(s)} = -q_p^{(f)} + \alpha_f T_p^{(f)} \quad (\text{D.2})$$

On pourra en déduire les conditions de Dirichlet-Neumann en prenant ($\alpha_s = \infty$, $\alpha_f = 0$) et les conditions de Dirichlet-Fourier en prenant $\alpha_s = \infty$. En outre on note \mathcal{G}_s et \mathcal{G}_f l'ensemble des grandeurs pariétales associées au solide et au fluide :

$$\mathcal{G}_s = (q_p^{(s)}, T_p^{(s)}, \alpha_s) \quad (\text{D.3})$$

$$\mathcal{G}_f = (q_p^{(f)}, T_p^{(f)}, \alpha_f) \quad (\text{D.4})$$

D.1 Cas général

On rappelle que, dans le cas général, les instants de couplage sont quelconques et ne coïncident donc pas forcément avec les états stationnaires prédéfinis dans le fluide.

On considère d'une part deux instants de couplage t_i et t_{i+1} qui ont la particularité de coïncider avec les états fluides associés $\mathcal{F}(t_i)$ et $\mathcal{F}(t_{i+1})$. D'autre part, on considère une suite d'instants de couplage quelconques $(\tau_k)_{1 \leq k \leq n_c}$ entre t_i et t_{i+1} . Les états fluides associés à ces instants ne sont pas prédéfinis et doivent être interpolés.

Initialisation des états fluides :

On considère que tous les états fluides $\mathcal{F}(t_i)$ ont été déterminés au préalable au moyen de conditions aux limites approximées.

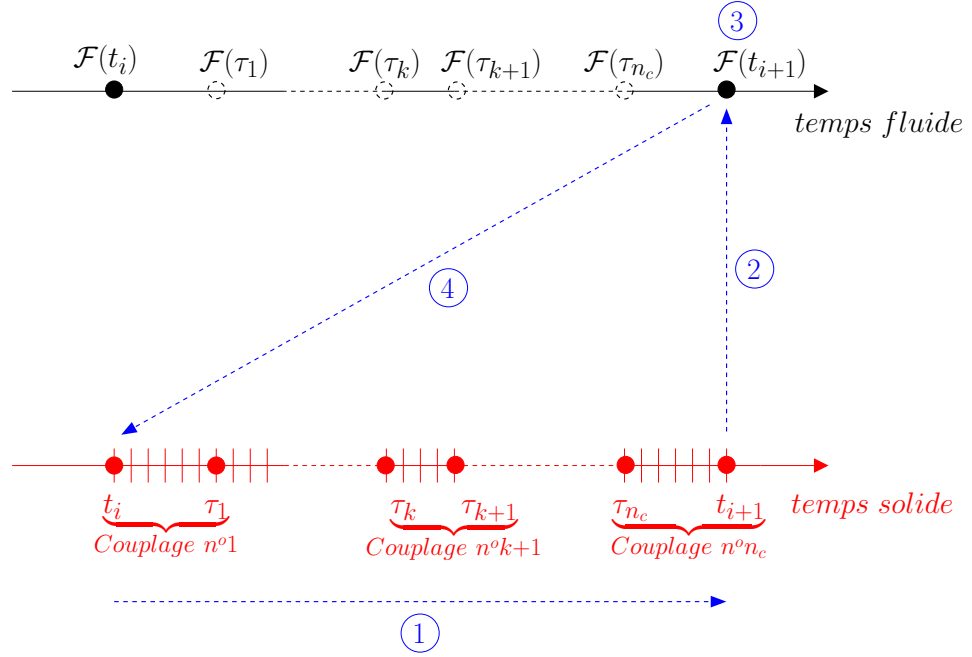


FIG. D.1 – Cycle de couplage pour l'algorithme général

Algorithme :

Nous partons de l'état du système à l'instant t_i issu du calcul couplé entre t_{i-1} et t_i . A partir d'une procédure cyclique basée sur des allers-retours entre t_i et t_{i+1} , nous cherchons à déterminer d'une part l'état stationnaire $\mathcal{F}(t_{i+1})$ côté fluide et d'autre part l'évolution instationnaire de la température dans la structure entre les instants t_i et t_{i+1} .

Nous allons décrire un cycle de couplage entre t_i et t_{i+1} . Celui-ci devra être reproduit jusqu'à obtenir l'égalité des flux et des températures à la paroi dans chaque milieu au temps t_{i+1} . On rappelle qu'un cycle se décompose en quatre points :

- ① **Calcul instationnaire dans la structure** entre les instants t_i et t_{i+1} via un certain nombre de couplages aux instants τ_k . Chaque état $\mathcal{F}(\tau_k)$ est déterminé par interpolation entre $\mathcal{F}(t_i)$ et $\mathcal{F}(t_{i+1})$ réactualisé à chaque couplage avec les données obtenues à l'instant τ_k .
- ② **Transfert des données du solide** $\mathcal{G}_s(t_{i+1})$ vers le fluide.
- ③ **Remise à jour de l'état fluide** $\mathcal{F}(t_{i+1})$ à l'aide des quantités $\mathcal{G}_s(t_{i+1})$ via un calcul Navier-Stokes jusqu'à l'obtention d'un régime stationnaire dans le fluide.
- ④ **Retour à l'instant** t_i en transférant les données du fluide $\mathcal{G}_f(t_{i+1})$ obtenues à l'étape ③. On effectue alors un nouveau calcul de conduction transitoire entre t_i et t_{i+1} .

L'étape essentielle de ce cycle est l'étape n°①, dans laquelle on effectue une série de couplages entre le fluide et la structure aux instants intermédiaires τ_k . Nous allons la détailler.

Détail de l'étape n°①

Elle consiste donc à effectuer un calcul transitoire dans la structure entre t_i et t_{i+1} via des couplages avec le fluide aux instants τ_k . Le nombre de couplages effectués est égal au nombre d'instants τ_k , c'est-à-dire n_c . Nous les noterons couplage n°1, couplage n°2,...,couplage n° k ,..., couplage n° n_c (FIG. D.1). Chacun de ces couplages se décompose en un sous-cycle basé sur une procédure d'allers-retours. Prenons l'exemple du couplage n°1 en gardant à l'esprit que les autres couplages seront effectués de la même façon.

couplage n°1 (FIG. D.2)

A partir de l'état du système à l'instant t_i , on cherche à déterminer l'état stationnaire $\mathcal{F}(\tau_1)$ et l'évolution instationnaire de la structure entre t_i et τ_1 .

- ①a **Calcul instationnaire** entre t_i et τ_1 en imposant une condition interpolée entre ces deux instants. Pour $t_i < t < \tau_1$, cette condition s'écrit :

$$q_p^{(s)}(t) + \alpha_f(t) T_p^{(s)}(t) = -q_p^{(f)}(t) + \alpha_f(t) T_p^{(f)}(t) \quad (D.5)$$

L'évolution des quantités $\mathcal{G}_f(t)$ dans le temps est obtenue par interpolation linéaire entre $\mathcal{G}_f(t_i)$ et $\mathcal{G}_f(\tau_1)$. De ce calcul, on déduit les quantités instationnaires $\mathcal{G}_s(t)$ entre t_i et τ_1 .

- ①b **Remise à jour** de l'état $\mathcal{F}(t_{i+1})$ à l'aide des quantités $\mathcal{G}_s(\tau_1)$ en imposant une condition aux limites de la forme :

$$q_p^{(f)}(t_{i+1}) + \alpha_s(t_{i+1}) T_p^{(f)}(t_{i+1}) = -q_p^{(s)}(\tau_1) + \alpha_s(\tau_1) T_p^{(s)}(\tau_1) \quad (D.6)$$

On en déduit alors les quantités stationnaires $\mathcal{G}_f(t_{i+1})$.

- ①c **Détermination des quantités stationnaires** $\mathcal{G}_f(\tau_1)$ par interpolation entre $\mathcal{G}_f(t_i)$ et $\mathcal{G}_f(t_{i+1})$.

- ①d **Retour à l'instant** t_i en transférant les données $\mathcal{G}_f(\tau_1)$ obtenues à l'étape précédente. On effectue alors un nouveau calcul transitoire entre t_i et τ_1 .

On répète ce sous-cycle jusqu'à obtenir la continuité du flux et de la température à l'instant τ_1 .

A l'issue des n_c couplages aux instants τ_k , on obtient les quantités instationnaires $\mathcal{G}_s(t)$ entre t_i et t_{i+1} . Ces quantités sont utilisées par le fluide dans l'étape ② décrite plus haut.

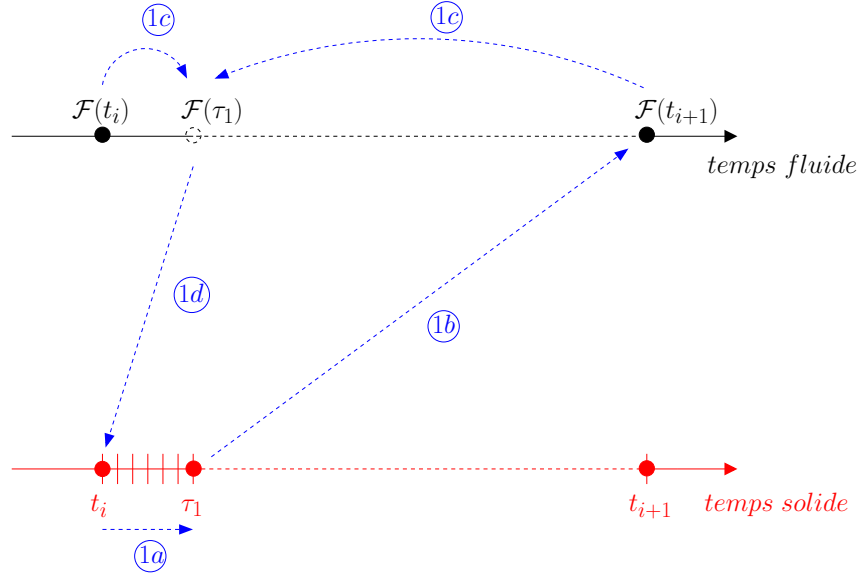


FIG. D.2 – Sous-cycle pour le couplage n°1

D.2 Cas particulier

Tous les instants de couplage coïncident avec les états fluides associés $\mathcal{F}(t_i)$. L'algorithme est représenté sur la figure D.3.

Cycle de couplage :

- ① **Calcul transitoire dans le solide** entre t_i et t_{i+1} avec une condition aux limites à la paroi interpolée entre ces deux instants. Pour $t_i < t < t_{i+1}$, on écrit :

$$q_p^{(s)}(t) + \alpha_f(t) T_p^{(s)}(t) = -q_p^{(f)}(t) + \alpha_f(t) T_p^{(f)}(t) \quad (\text{D.7})$$

Les quantités $\mathcal{G}_f(t)$ sont interpolées entre t_i et t_{i+1} . On en déduit les quantités instationnaires $\mathcal{G}_s(t)$ entre t_i et t_{i+1} .

- ② **Transfert des quantités** $\mathcal{G}_s(t_{i+1})$ au fluide.
- ③ **Remise à jour** de l'état stationnaire $\mathcal{F}(t_{i+1})$ à l'aide des quantités $\mathcal{G}_s(t_{i+1})$ reçues à l'étape ② en imposant la condition aux limites suivante :

$$q_p^{(f)}(t_{i+1}) + \alpha_s(t_{i+1}) T_p^{(f)}(t_{i+1}) = -q_p^{(s)}(t_{i+1}) + \alpha_s(t_{i+1}) T_p^{(s)}(t_{i+1}) \quad (\text{D.8})$$

On en déduit les quantités $\mathcal{G}_f(t_{i+1})$ en effectuant un calcul Navier-Stokes jusqu'à obtenir l'état stationnaire $\mathcal{F}(t_{i+1})$.

- ④ **Retour à l'instant** t_i et nouveau calcul transitoire en imposant une condition interpolée entre t_i et t_{i+1} . Cette condition est identique à (D.7). On en déduit les nouvelles quantités instationnaires $\mathcal{G}_s(t)$ et le champ de température dans le solide.

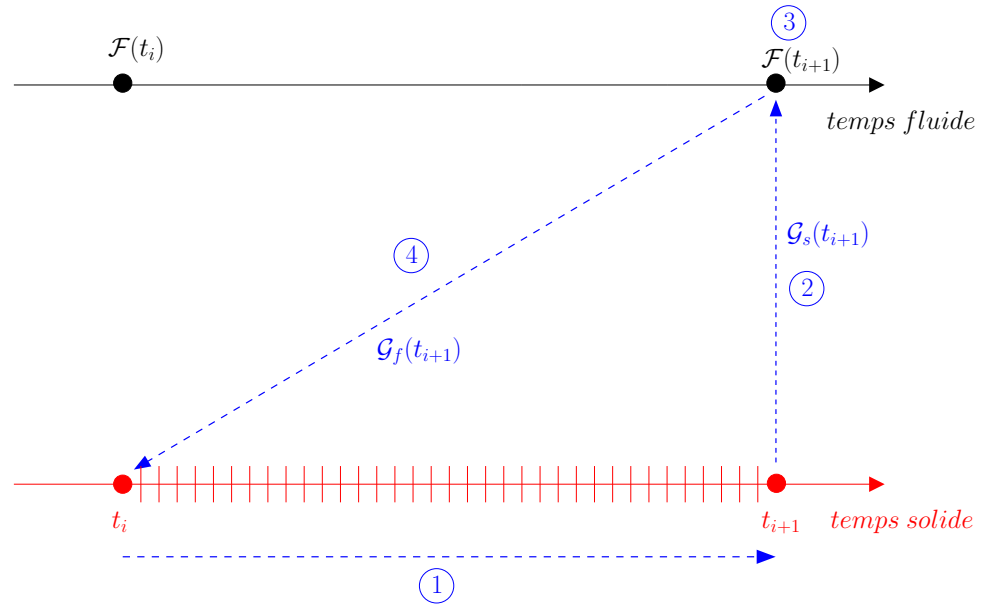


FIG. D.3 – Cycle de couplage pour l'algorithme particulier

On répète ce cycle jusqu'à l'obtention de l'égalité des flux et des températures à l'interface à l'instant t_{i+1} . On passe alors à l'instant suivant.

Bibliographie

- [1] MpCCI, Mesh parallel Code Coupling Interface, Specification of MpCCI Version 2.0. Technical report, The Fraunhofer-Institute for Algorithms and Scientific Computing (SCAI).
- [2] *Northwest Numerics, Inc.* Seattle, <http://www.nwnumerics.com>.
- [3] K.J. Bathe and E.L. Wilson. *Numerical Methods in Finite Element Analysis*. Prentice Hall, 1976.
- [4] H. Blasius. *Z.Math.u.Phy.*, volume 56. 1908.
- [5] F.J. Blom. A monolithical fluid-structure interaction algorithm applied to the piston problem. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 167 :369–391, 1998.
- [6] E. Bucchignani, F. Stella, and F. Paglia. A partition method for the solution of a coupled liquid-structure interaction problem. *Applied Numerical Mathematics*, (n°51) :463–475, 2004.
- [7] G.A. Campolina Francia. *Contribution à l'étude des écoulements pariétaux avec effusion*. PhD thesis, INSA de Lyon, 1996.
- [8] G.A. Campolina Francia, P. Pagnier, and A. Lallemand. Simulation des transferts de masse et de chaleur par modélisation à bas nombre de Reynolds dans un écoulement avec effusion locale en canalisation. *Revue Générale de Thermique*, 37, 1998.
- [9] S. Chemin and M.P. Errera. Couplage de codes de calcul scientifique, étude des interactions fluide-structure : couplage thermique stationnaire. In *Congrès de la Société Française de Thermique*, 2004.
- [10] S. Chemin, M. Rebay, and M. Lachi. Etude des transferts thermiques à l'interface fluide-structure par couplage de codes de calcul. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 2006.
- [11] Douglas E. Crabtree and Emilie V. Haynsworth. An identity for the Schur complement of a matrix. *Proceedings Of The American Mathematical Society*, Vol. 22(n° 2) :364–366, 1969.
- [12] S.H. Crandall. *Engineering Analysis*. McGraw-Hill, 1956.
- [13] G. Dhatt and G. Touzot. *Une présentation de la méthode des éléments finis*. Collection Université de Compiègne, 1981.
- [14] E. Divo and Kassab. Iterative domain decomposition meshless methods modeling of incompressible viscous flows and conjugate heat transfer. *Engineering analysis with boundary elements*, 30 :465–478, 2006.
- [15] E. Divo, E. Steinthorsson, A.J. Kassab, and R. Bialecki. An iterative BEM/FVM protocol for steady-state multidimensional conjugate heat transfer in compressible flows. *Engineering analysis with boundary elements*, 26 :447–454, 2002.

- [16] D. Dutoya. Modélisation de la turbulence au voisinage des parois : étude numérique des performances des différents modèles. Technical Report RT ONERA 48/3473 EY, ONERA, 1992.
- [17] D. Dutoya. Option axisymétrique, modèles de turbulence pariétale de paroi pour le code Mathilda. Technical Report RT ONERA 49/3473 EY, ONERA, 1992.
- [18] D. Dutoya and M.P. Errera. Une décomposition formelle du Jacobien des équations d'Euler. application à des schémas numériques décentrés. *La recherche aérospatiale*, 1 :25–35, 1992.
- [19] E.R.G Eckert and H.H. Cho. Transition from transpiration to film cooling. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 37 :3–8, 1994.
- [20] V.L. Eriksen. Film cooling effectiveness and heat transfer with injection through holes. Technical Report CR 72991, NASA, 1965.
- [21] Marc Paul Errera. *Modélisation multidimensionnelle de l'aérodynamique interne dans les moteurs diesel*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie-Paris VI, 1990.
- [22] M.P. Errera and S. Chemin. A fluid-solid thermal coupling applied to an effusion cooling system. In *34th AIAA Fluid Dynamics Conference and Exhibit*, number AIAA 2004-2140, 2004.
- [23] M.P. Errera and S. Chemin. Calculs couplés aérothermiques optimisés appliqués à la multiperforation. In *Congrès de la Société Française de Thermique*, 2006.
- [24] C. Farhat, K.G. van der Zee, and P. Geuzaine. Provably second-order time-accurate loosely-coupled solution algorithms for transient nonlinear computational aeroelasticity. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 2005.
- [25] A. Favre. Equations des gaz turbulents compressibles. *Journal de Mécanique*, 4 :361–421, 1965.
- [26] F. Feyel. Some new techniques regarding the parallelisation of ZeBuLoN, an object oriented finite element code for structural mechanics. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 36(5) :923–935, 2002.
- [27] B.A. Finlayson. *The Method of Weighted Residuals and Variational Principles*. Academic Press, 1972.
- [28] M.B. Giles. Stability analysis of numerical interface conditions in fluid-structure thermal analysis. *International Journal Of Numerical Methods In Fluids*, 1997.
- [29] M. Glück, M. Breuer, F. Durst, A. Halfmann, and E. Rank. Computation of fluid-structure interaction on lightweight structures. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, (n°89) :1351–1368, 2001.
- [30] S. K. Godunov and V.S. Riabenkii. *Difference Schemes : An Introduction To The Underlying Theory*. Elsevier Science New York, 1987.
- [31] R.J. Goldstein, E.R.G. Eckert, V.L. Eriksen, and J.W. Ramsey. Film cooling following injection through inclined circular tubes. Technical Report CR 76612, NASA, 1969.
- [32] R.J. Goldstein and V.L. Eriksen. Heat transfer and film cooling following normal injection through a round hole. Technical Report 74-GT-6, ASME, 1974.
- [33] J. Gosse. Analyse simplifiée du couplage conduction-convection pour un écoulement à couche laminaire sur une plaque plane. *Revue Générale de Thermique*, (228) :967–971, 1980.

- [34] B. Gustafsson, H.O. Kreiss, and A. Sundstrom. Stability theory of difference approximations for mixed initial boundary value problems II. *Math. Of Computation*, Vol. 26 :649–686, 1972.
- [35] M.G. Hackenberg, P. Post, R. Redler, and B. Steckel. MpCCI, multidisciplinary applications and multigrid. In *Proceedings ECCOMAS, CIMNE, Barcelona*, 2000.
- [36] A. Heselhaus and D.T. Vogel. Numerical simulation of turbine blade cooling with respect to blade heat conduction and inlet temperature profiles. *AIAA paper*, (95-3041), 1995.
- [37] A. Heselhaus, D.T. Vogel, and H. Krain. Coupling of 3D Navier Stokes external flow calculations and internal 3D heat conduction calculations for cooled turbine blades. *AGARD Conference Proceedings 527*, (paper 40), 1991.
- [38] L.D. Hylton, M.S. Mihelc, E.R. Turner, D.A. Nealy, and R.E. York. Analytical and experimental evaluation of the heat transfer distribution over the surface of turbine vanes. Technical Report CR 168015, NASA, 1983.
- [39] B. Hübner, E. Walhorn, and D. Dinkler. A monolithic approach to fluid-structure interaction using space-time finite elements. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 193 :2087–2104, 2004.
- [40] J. Jean-Roch. *Accélération de la convergence vers une solution stationnaire des calculs en aérodynamique*. PhD thesis, Université Blaise Pascal, 1997.
- [41] H.O. Kreiss. Numerical methods for hyperbolic partial differential equations. Technical report, Von Karman Institute For Fluid Dynamics, 1979.
- [42] P.D. Lax. Hyperbolic systems of conservation laws and the mathematical theory of shock waves. *SMAI*, 1972.
- [43] A.V. Luikov. Conjugate convective heat transfer problems. *Int. J. Heat Transfer*, (17) :257, 1974.
- [44] F. Magoulès, F.X. Roux, and L. Series. Algebraic approximation of Dirichlet-to-Neumann maps for the equations of linear elasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2005.
- [45] R.E Mayle and F.J. Camarata. Multihole cooling film effectiveness and heat transfer. *Journal of Heat Transfer*, pages 534–538, 1975.
- [46] S.C. Mikhlin. *Variational Methods in Mathematical physics*. Macmillan, 1964.
- [47] A. Montenay. *Analyse Numerique de l’Aerothermique d’Aubages et de Cavites de Turboréacteur*. PhD thesis, Universite Paris 6, 2000.
- [48] S. Piperno. *Simulation numérique de phénomènes d’interaction fluide-structure*. PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1996.
- [49] S. Piperno and C. Farhat. Partitioned procedures for the transient solution of coupled aeroelastic problems, part II : Energy transfer analysis and three-dimensional applications. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 190 :3147–3170, 1995.
- [50] S. Piperno, C. Farhat, and B. Larroturou. Partitionned procedures for the transient solution of coupled aeroelastic problems, part I : Model problem, theory and two-dimensional application. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 124 :79–112, 1995.
- [51] E. Pohlhausen. *Zamm 1*. 1921.
- [52] P.L. Roe. Approximate Riemann solvers, parameter vectors and difference schemes. *Journal of Computational Physics*, 43 :357–372, 1981.

- [53] F.X. Roux, F. Magoulès, and L. Series. Optimization of interface operator based on algebraic approach. *Domain Decomposition Methods in Science Engineering*, 57 :297–304, 2002.
- [54] D. Scherrer and F. Vuillot. MSD applications. In *First ONERA-DLR Aerospace Symposium*, Paris 21-24 June 1999.
- [55] H. Schlichting. *Boundary layer theory*. Mc Graw Hill, 1968.
- [56] W.R Schowalter, W.R. Luikov, W.J. Minkowycz, and N.H. Afgan. *Progress in heat and mass transfer*, volume 5. 1972.
- [57] D.L. Sondak and D.J. Dorney. Simulation of coupled unsteady fluid dynamics and conduction heat transfer in a turbine stage. In *35th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit*, number AIAA 99-2521, 1999.
- [58] L.N. Trefethen. Stability of finite difference models containing two boundaries or interfaces. Technical Report CR 172319, NASA, 1984.
- [59] L.N. Trefethen and L. Halpern. Well-posedness of one-way wave equations and absorbing boundary conditions. Technical Report CR 172619, NASA, 1985.
- [60] F. Zhang. *The Schur Complement And Its Applications*. Springer, 2005.
- [61] O.C. Zienkiewicz. *The Finite Element Method in Engineering Science*. McGraw-Hill Publ., 1967.

Résumé

Dans cette thèse, nous présentons le couplage thermique entre un code Navier-Stokes de type volumes finis avec un code de conduction de type éléments finis. Ce couplage a été réalisé au moyen de la bibliothèque informatique MpCCI. Le couplage entre les deux codes est effectué à l'interface par l'intermédiaire de conditions de raccord ou conditions aux limites thermiques. Ces conditions font intervenir des coefficients de couplage à l'interface et associés au milieu fluide et au milieu solide. Dans le cadre du couplage thermique en régime permanent, l'étude de la stabilité des conditions de raccord permet de définir les coefficients de couplage optimaux en terme de stabilité et de convergence. La méthode de couplage a été validée sur un cas élémentaire et sur des configurations industrielles. La deuxième partie est consacrée à l'étude du couplage en régime transitoire. Un algorithme de couplage original a été mis en œuvre et répond à un certain nombre de besoins industriels. Cet algorithme consiste à filtrer les hautes fréquences, ce qui revient à considérer le fluide comme stationnaire à chaque instant de couplage. L'algorithme instationnaire a été validé expérimentalement sur le cas d'un écoulement sur une plaque plane.

Abstract

In this thesis, a conjugate heat transfer procedure between a finite-volume Navier-Stokes solver and a finite-element conduction solver is presented. The coupling has been performed through the MpCCI library and thermal boundary conditions, on the coupling surfaces. These conditions define two coupling coefficients connecting both the fluid and the solid domain.

The first part describes the fluid-solid thermal steady state coupling. The stability analysis of the boundary conditions highlights the most efficient coefficients in terms of stability and convergence. As a consequence, a steady state algorithm has been implemented. It corresponds to an iterative procedure between the Navier-Stokes solver and the heat conduction solver. Thanks to the MpCCI library, the thermal quantities (heat flux, temperature) are exchanged between each solver until the thermal steady state is reached in both the fluid and the solid domains. This coupling method has been validated on a simple case, namely a flat plate, and two industrial cases, a flow around a turbine blade and an effusion cooling system. The second part of this thesis is dedicated to the fluid-solid thermal transient coupling. An original coupling algorithm applied to industrial problems is described. This algorithm corresponds to an iterative procedure between a steady state fluid description and a transient solid description. The experimental setup consists of an interaction between a steady flowfield and a transient heat conduction in a flat plate.